Е. С. Новиков, д-р техн. наук, доц.;
А. К. Красников, канд. техн. наук, доц.
ОАО "Концерн "Моринформсистема-Агат", Москва

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ КОРПОРАТИВНЫХ ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

Одной из целей внедрения корпоративных информационно-управляющих систем является снижение трудозатрат лиц, принимающих решения на выполнение вспомогательных процессов. Для относительного распределения трудозатрат известны следующие оценки: творческие процессы – 5-15 %, информационные процессы – 65-70 %, расчеты – 20-25 %. С увеличением объема бизнеса в условиях рыночной конкурентной среды возрастает объем вычислений и актуальность вопросов обеспечения устойчивости алгоритмов к накоплению погрешности. В настоящей работе разработан и обоснован метод анализа устойчивости вычислительных алгоритмов относительно ошибок округлений, основанный на вероятностном подходе.

При создании современных корпоративных информационно-управляющих систем (КИУС) предъявляются все более высокие требования к достоверности, надежности и эффективности алгоритмов математического обеспечения, которые реализуются в данных системах.

В специальной литературе, посвященной численным методам решения задач на ЭВМ, выделяют четыре источника погрешности результата[1] :

- ***математическая модель*** (погрешности появляются при неточном описании реальных процессов, в связи с чем рассматривается не сам процесс, а его идеализированная математическая модель);
- ***погрешность метода***, когда применяемый для решения задачи математический метод не является точным (например, замена бесконечных процессов, пределами которых являются искомые величины, конечной последовательностью действий; приближенное выражение величин, входящих в условие задачи и др.);
- ***исходные данные***, которые зачастую бывают неточны;
- ***погрешности округления***, которые возникают в результате выполнения на ЭВМ арифметических операций с конечным числом значащих цифр. Эти погрешности накапливаются в ходе вычислений.

Полная погрешность реализуемых в системе алгоритмов является результатом сложного взаимодействия всех указанных выше погрешностей.

До последнего времени основное внимание специалистов по созданию алгоритмического и программного обеспечения КИУС уделялось исследованию влияния первых трех источников погрешности на точность конечных результатов обработки больших массивов управленческой и учетной информации. Именно эти группы погрешностей оказывали наиболее существенное влияние на точность конечных результатов.

Ошибки, связанные с погрешностями округлений при относительно небольших объемах вычислений, оказывали менее существенное влияние на точность конечных результатов. Однако по мере стремительного возрастания производительности вычислительных систем и появления технической возможности использовать более мощные оптимизационные алгоритмы (требующие, как правило, гораздо большего объема вычислений) ошибки, связанные с погрешностями округлений, становятся все более значимыми.

[1] *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.

В специальной литературе все чаще стали появляться сообщения, что алгоритмы, построенные на основе методов, которые при сравнительно малых объемах вычислений давали вполне приемлемые с практической точки зрения результаты, при существенном увеличении объема выполненных вычислительных операций или при определенных сочетаниях исходных данных стали выдавать недопустимо большие ошибки[2].

Алгоритмы, у которых влияние ошибок округлений, возникающих в процессе выполнения алгоритма в вычислительной системе на окончательные результаты, оказывают существенное влияние, специалисты в области вычислительной математики называют *неустойчивыми алгоритмами* относительно ошибок округления[3].

Проблеме анализа разрабатываемых алгоритмов на *устойчивость* относительно ошибок округлений посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных специалистов. При анализе *устойчивости* алгоритмов нашли применение методы:

- теории ошибок;
- теории возмущений;
- интервального анализа;
- моделирования работы вычислительных устройств и алгоритмов.

Рассмотрим кратко достоинства и особенности каждого из указанных выше методов. При использовании методов *теории ошибок*[4] обычно вычисляют предельные значения абсолютных и относительных погрешностей результатов основных арифметических операций, реализуемых в ЭВМ. Последовательно применяя эти операции, далее вычисляют предельные значения абсолютных и относительных погрешностей промежуточных и окончательных результатов. Методы вычисления таких ошибок корректно обоснованы соответствующими теоремами и удобны при практическом применении, когда объем вычислительных операций сравнительно небольшой.

Однако при большом объеме вычислений (в каждом конкретном случае объем вычислений зависит от специфики решаемого алгоритма), измеряемом обычно десятичными порядками, вычисленные на основе указанных теорем предельные значения абсолютных и относительных погрешностей окончательных результатов получаются сильно завышенными и практически теряют интерес для исследователя.

Метод *теории возмущений*[5] показал свою высокую эффективность (особенно в линейной алгебре) при исследовании сравнительной устойчивости и точности различных численных методов. Однако он не позволил в общем случае получить надежный ответ на следующий важный при практических применениях вопрос: сколько верных цифр присутствует в полученном численном результате?

В последние годы стремительно развивается новое математическое направление, возникшее на стыке численного анализа и вычислительной техники - *интервальная математика (интервальный анализ),* возникшее из практической потребности повысить достоверность результатов, получаемых при вычислениях на ЭВМ[6].

При использовании *интервального анализа* исходные данные и промежуточные результаты представляются граничными значениями, над которыми и производятся все операции. При этом арифметические операции определяются таким образом, что результат соответствующей точной операции гарантированно находится внутри вычисляемых границ.

В отличие от традиционного численного анализа, в “интервальных алгоритмах” широко используются различные теоретико-множественные операции с целью уточнения

---

[2] *Каханер Д., Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. М. : Мир, 2001.

[3] *Воеводин В.В.* Ошибки округления и устойчивость в прямых методах линейной алгебры. М. : Изд-во МГУ, 1969.;

Wilkinson J.A. Ошибки округления в алгебраических процессах. London : Her Majestyÿs Stationary Office, 1963.

[4] *Бахвалов Н.С, Жидков Н.П.* Численные методы. М.: Наука, 1975.

Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М. : Наука, 1966.

[5] *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры. М. : Наука, 1977.

[6] *Moore R.E.* Interval analysis. Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1966.

границ области, в пределах которой находится неизвестное точное значение искомой величины.

Несмотря на значительные научные и практические результаты, полученные в последние годы в рамках *интервального анализа,* методы и технологии этой научной дисциплины еще не прошли необходимой широкой практической апробации при создании различных вычислительных систем, которые позволили бы разработчикам КИУС, к которым предъявляются высокие требования по надежности и достоверности вычисляемых результатов, уверенно использовать их в своих практических разработках.

При использовании подхода, связанного с математическим *моделированием* работы конкретной вычислительной системы и решаемых на ней алгоритмов, необходимо предварительно произвести разработку специальной программной модели работы исследуемой вычислительной системы на уровне выполнения отдельных микрокоманд.

Практика показывает, что создание таких моделей обычно представляет достаточно серьезную и трудоемкую самостоятельную инженерную работу. Кроме того, полученные при моделировании результаты относительно *устойчивости* алгоритма для конкретных исходных данных не всегда оказывается возможным распространить на другие сочетания исходных данных.

Возникает также серьезная проблема по определению необходимого сочетания исходных данных и достаточного объема моделирования для получения практически применимых результатов, обосновывающих вывод относительно *устойчивости* используемого алгоритма.

Все это приводит к необходимости проведения общего большого объема моделирования для получения более или менее достоверного результата, позволяющего судить об *устойчивости* исследуемого алгоритма.

Если подвести итог анализу работ, посвященных исследованию *устойчивости* алгоритмов, то следует отметить общий неутешительный вывод, что для достаточно нетривиальных алгоритмов с большим числом вычислительных операций получить сколько-нибудь реалистическую оценку погрешности вычислений, сваязанных с ошибками округлений, часто оказывается трудной математической задачей, по сложности сопоставимой с разработкой нового численного метода.

При использовании в программах заданного алгоритма *максимального,* заведомо превышающего необходимые практические потребности, *формата* представления чисел с плавающей точкой (некоторые современные мощные алгоритмические языки допускают такую возможность) можно уйти от проблемы *неустойчивости* алгоритма, но такой подход всегда ведет к существенному завышению вычислительных потребностей в части производительности и объемов памяти КИУС.

В настоящей работе сделана попытка разработать метод анализа *устойчивости* вычислительных алгоритмов КИУС относительно ошибок округлений, который использует вероятностный подход к оценке возникающих в процессе вычислений ошибок, позволяющий получить более реалистичные и существенно меньшие оценки суммарных погрешностей результатов выполнения рассматриваемых алгоритмов, что позволяет более объективно судить о степени *устойчивости* алгоритма.

При разработке указанного метода были рассмотрены в комплексе следующие основные группы вопросов:

- какие операции приводят к возникновению ошибок округления;
- каковы статистические характеристики этих ошибок (математические ожидания и дисперсии);
- как распространяются ошибки вычислений при решении задач;
- каковы формальные критерии определения *устойчивости* алгоритмов.

Для ответа на указанные выше группы вопросов в качестве исходных данных были приняты следующие допущения и ограничения.

В качестве языков программирования были приняты наиболее популярные в настоящее время языки высокого уровня языки C/C ++.

Выполнение всех арифметических операций-источников ошибок округлений в ЭВМ происходит в двоичной системе счисления.

Все исходные данные и результаты являются нормализованными числами и представлены в прямом модифицированном коде.

Вероятность появления цифр “0” и “1” в любом разряде мантиссы результата после выполнения арифметической операции и нормализации результата равна 0,5 (кроме старшего разряда мантиссы, значение которого после нормализации результата всегда равно 1).

Для выбранных языков программирования С/С++ источниками ошибок округлений являются следующие арифметические операции с числами, представленными в форме “с плавающей точкой”: + (сложение), - (вычитание), * (умножение), / (деление).

При определении численных значений ошибок округлений рассматривались следующие методы округлений, которые нашли широкое применение в современной вычислительной технике:

- *до ближайшего;*
- *до ближайшего четного;*
- *усечение мантиссы.*

Для каждого возможного сочетания: метода округлений, типа арифметической операции, сочетания порядков исходных данных, возможного нарушения нормализации результата после прямого выполнения арифметической операции в соответствии с классическими правилами выполнения арифметических операций с двоичными числами и последующей коррекцией нарушения нормализации влево или вправо производилось определение математического ожидания и дисперсии ошибок округлений.

При последующем изложении используются следующие обозначения:

Ő, Ó – исходные данные (аргументы) арифметической операции;

Z – результат арифметической операции;

$X = m_x 2^{px}$; $У = m_Y 2^{py}$; $Z = m_Z 2^{pz}$ – представления чисел X, $У$, Z в двоичной системе счисления;

m_x, m_Y, m_Z - нормализованные мантиссы соответственно чисел X, $У$, Z;

px, py, pz – двоичные порядки соответственно чисел X, $У$, Z;

Δ – ошибка округления; $M(\Delta)$ – математическое ожидание ошибки округления;

$Д(\Delta)$ – дисперсия ошибки округления.

Далее в качестве примеров представлены некоторые результаты полученных аналитических выражений для вычисления математических ожиданий и дисперсий ошибок округлений.

1. Операция вычитания. $Z=X-Y$. *Метод округления – “усечение мантиссы”.*

Исходные данные:

$X*У > 0$; $Z < 0$;

$pz - \min(px, py) > 0$.

$M(\Delta) = 2^{pz} s^{(m+n+1)} (2^n - 1)$;

$Д(\Delta) = 2^{2pz} s^{(2m+2n+1)} (2^n - 1)(2^{n+1} - 1)3^{-1} -$

$- 2^{2pz} s^{2(m+n+1)} (2^n - 1)^2$;

где $n = pz - \min(px, py)$; $z > 0$.

1. Операция сложения. $Z = X + У$. *Метод округления – “до ближайшего”.*

Исходные данные:

$X > 0$; $У > 0$; $px = py$.

$M(\Delta) = 2^{pz} s^{(m+2)}$;

$Д(\Delta) = 2^{2pz} s^{(2m+3)} - 2^{2pz} s^{2(m+2)}$.

1. Операция умножения. $Z = X*У$. *Метод округления – “до ближайшего четного”.* Исходные данные:

$X*У > 0$ или $X*У < 0$.

$M(\Delta) = 0$;

$Д(\Delta) = 2^{2pz} s^{(2m+2n+1)} ((2^n - 1)(2^{n-1} - 1)3^{-1} + 2^{(n-1)})$,

где $n = m - (px + py - pz)$.

При учете распространения случайных ошибок округлений в процессе выполнения заданного алгоритма используются известные теоретические результаты теории вероятностей по вычислению статистических характеристик функций случайных аргументов.

Однако для того чтобы корректно использовать эти результаты на каждом последовательном этапе вычислений этих характеристик (при выполнении каждой арифметической операции – потенциальном источнике появления ошибок округлений), необходимо знать законы распределения исходных данных и после выполнения арифметической операции определить закон распределения результата выполнения этой арифметической операции, который в дальнейшем используется как закон распределения одного из аргументов исходных данных при выполнении следующей арифметической операции.

При выполнении вычислительных алгоритмов большой размерности строгое аналитическое определение указанных законов практически невозможно.

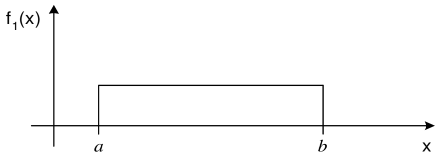
Поэтому в процессе выполненных исследований было обосновано и предложено использовать для исходных данных и результатов вычисления функций случайных аргументов следующие базовые законы, которые в процессе вычислений являются аппроксимациями указанных неизвестных законов:

- *закон равномерной плотности* (указанный закон обладает максимальной энтропией среди всех законов для заданного диапазона изменения случайной величины);
- *закон Симпсона* (удобен для аппроксимации различных колоколообразных законов распределения с центральной симметрией, например нормальных законов);
- *линейные законы в виде треугольников* (удобны для аппроксимации экспоненциальных законов распределения – единственных среди законов распределения, которые не обладают последействием).

При использовании указанных законов их числовые характеристики (математические ожидания и дисперсии) берутся равными вычисленным аналогичным характеристикам исходных данных или результатов выполнения рассматриваемых арифметических операций.

Суммарная ошибка округления после выполнения любой арифметической операции складывается из ошибки округления, полученной при выполнении данной конкретной операции, и ошибок округлений, которые являются суммами всех ошибок округлений, возникших до выполнения данной операции

1) закон равномерной плотности



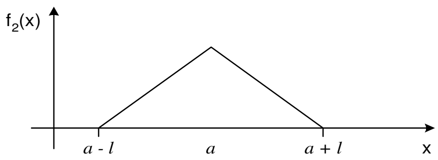
$f_1(x) = 0$ при $x \notin [a, b]$

$f_1(x) = 1/(b-a)$ при $x \in [a, b]$,

где $a = M(x) - \sigma(x)\sqrt{3}$

$b = M(x) + \sigma(x)\sqrt{3}$

2) аппроксимация колоколообразных законов распределения



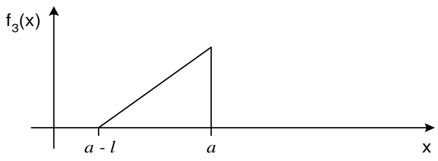
$f_2(x) = 0$ при $x \notin [a-l, a+l]$

$f_2(x) = (x-a+l)/l^2$ при $x \in [a-l, a]$

$f_2(x) = (-x+a+l)/l^2$ при $x \in [a, a+l]$,

где $a = M(x)$ $l = \sigma(x)\sqrt{6}$

3) аппроксимация экспоненциальных законов распределения

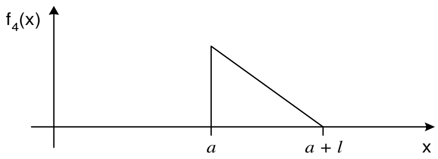


$f_3(x) = 0$ при $x \notin [a-l, a]$

$f_3(x) = 2(x-a+l)/l^2$ при $x \in [a-l, a]$,

где $a = M(x) + \sigma(x)\sqrt{2}$

$l = \sigma(x)\sqrt{18}$



$f_4(x) = 0$ при $x \notin [a, a+l]$

$f_4(x) = 2(-x+a+l)/l^2$ при $x \in [a, a+l]$,

где $a = M(x) - \sigma(x)\sqrt{2}$

$l = \sigma(x)\sqrt{18}$

Базовые законы распределения и их числовые характеристики (эти ошибки учтены в законах распределений аргументов данной операции). Виды предложенных базовых законов и их числовые характеристики представлены на рисунке.

Для обоснования допустимости использования указанных законов распределений в качестве базовых были проведены специальные исследования оценки устойчивости количественных значений статистических характеристик различных функций случайных аргументов (математических ожиданий и средних квадратических отклонений) в зависимости от вида закона распределения при одинаковых заданных их количественных характеристиках (математических ожиданий и средних квадратических отклонений).

Выполненные исследования показали, что для определенного диапазона изменения аргументов функций случайных величин значения математических ожиданий и средних квадратических отклонений функций случайных величин сравнительно слабо зависят от формы закона распределения, но всегда существенно зависят от количественных характеристик (математических ожиданий и средних квадратических отклонений) этих законов распределений.

Однако по мере выполнения алгоритма, реализуемого в вычислительной системе, суммарная ошибка округлений нарастает и влияние формы закона распределения отдельных аргументов на конечный результат может становится заметным. Как правило, это происходит тогда, когда вычисленное значение ошибки округления становится соизмеримым с абсолютным значением самого значения функции случайных величин. Это является формальным признаком того, что данный алгоритм становится *неустойчивым.*

Выводы

1. В настоящей работе разработан и обоснован метод анализа устойчивости вычислительных алгоритмов ИУС относительно ошибок округлений, который использует вероятностный подход к оценке возникающих в процессе вычислений ошибок, позволяющий получить более реалистичные и существенно меньшие приближенные оценки суммарных погрешностей результатов выполнения рассматриваемых алгоритмов, что позволяет более объективно судить о степени устойчивости алгоритма.

2. Разработаны аналитические выражения для вычисления приближенных значений статистических характеристик ошибок округлений при различных сочетаниях исходных данных, оказывающих существенное влияние на эти характеристики.

3. Предложены критерии для автоматизации получения оценки устойчивости алгоритмов относительно ошибок округлений.

4. Обеспечена возможность автоматизации получения приближенных оценок устойчивости алгоритмов большой размерности.

5. Полученные аналитические выражения относительно приближенных оценок статистических характеристик ошибок округлений для каждой арифметической операции могут использоваться при структурной оптимизации вычислительных алгоритмов.