

О.И. Никонов, д-р физ.-мат. наук, проф.,
А.А.Фирсов, аспирант
Уральский государственный технический
университет – УПИ, Екатеринбург

РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ФОНДОВОГО РИСКА В КОММЕРЧЕСКОМ БАНКЕ НА ОСНОВЕ GARCH – ПРОЦЕССА ДЛЯ ДВУХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ*)

Оценка рыночного риска проводится финансовыми институтами повсеместно. На практике применяются как общепризнанные модели оценки риска, так и индивидуально разработанные. При разработке финансовым институтом собственной модели очень важным фактором является не только точность, но и соответствие модели общепризнанным подходам, в частности, требованиям Базельского комитета по банковскому надзору. В работе для достижения этих целей предлагается использование регрессионной модели оценки рыночного риска, разработанной на основе GARCH – процесса для двух временных рядов, учитывающей общую и специальную его компоненты.

1. Введение: анализ риска на основе показателя Value-at-risk

Важным и популярным в риск-менеджменте инструментом для финансовых институтов является показатель Value-at-risk (VaR). Этот показатель рекомендован банкам Базельским комитетом в качестве основного инструмента оценки риска и представляет собой оценку максимальных потерь по позиции финансового инструмента для определенного периода при определенном уровне доверия. Уровень доверия отражает «экстремальные рыночные условия», которые могут реализоваться с заданной вероятностью, например, 2,5 % или 5 %.

Критическим моментом в названном подходе является идентификация функции распределения доходностей исследуемого актива. Как правило, используется нормальное или логнормальное распределение. Однако, экспериментальные исследования показывают, что для реальной функции плотности распределения характерно наличие

«толстых хвостов», поэтому нормальное распределение недооценивает вероятность критических событий, а следовательно, и показатель VaR.

Кроме того, проблемой является оценка параметров функции распределения, которая осуществляется по историческим данным. Данные содержат помехи и неопределенность, которые отражаются на стандартных ошибках. Неопределенность и случайные ошибки оказывают влияние на функцию распределения, что, в свою очередь, влияет на показатель VaR¹.

Поэтому существует необходимость построения новой модели, которая была бы точнее, с одной стороны, и соответствовала принятым подходам, с другой.

Базельский комитет по банковскому надзору предписывает использовать модель, которая должна адекватно отражать все существенные риски, присущие доходности долевым ценным бумагам, включая как общий рыночный риск, так и риск конкретного портфеля. Внутренние модели должны адекватно объяснять историческую вариативность цен,

*) Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 06-01-00483а и Российского гуманитарного научного фонда, проект № 05-02-02118а.

¹ Thomas L. Linsmeier, Neil D. Pearson. Risk Measurement: An introduction to Value at Risk. University of Illinois at Urbana-Champaign. 1996. www.exinfm.com.

учитывать как величину, так и изменения в структуре потенциальных концентраций риска и быть устойчивыми к ухудшению рыночных условий. Выборка требований, данные которых используются для оценок, должна совпадать или, по крайней мере, быть сопоставимой с выборкой банковских вложений в долевые ценные бумаги².

В работе приводится вариант модели оценки VaR с использованием GARCH-процесса³, построенной по двум временным рядам данных.

Использование для прогноза VaR GARCH-процесса объясняется тем, что изменчивость волатильности учитывает наиболее близкие ее режимы. Также использование t -распределения Стьюдента учитывает большую плотность распределения в «толстых хвостах». Это позволяет построить более точную модель VaR⁴.

2. Регрессионная модель GARCH(2,2) для двух временных рядов

В приложениях, основанных на классических эконометрических моделях, обычно предполагается, что автокорреляция ошибок в модели равна нулю. Однако в последнее десятилетие значительно возрос интерес исследователей к систематически изменяющимся ошибкам и дисперсиям ошибок, так как во временных рядах обменных курсов и доходностей фондового рынка было обнаружено чередование периодов малых значений ошибок с периодами больших значений ошибок или соответственно низкой и высокой волатильности.

Волатильность обычно измеряется дисперсией σ^2 временного ряда, или стохастического процесса. Гомоскедастичность модели процесса означает, что остаток в этой модели имеет постоянную дисперсию. Антонимом является гетероскедастичность.

¹ Basel Committee on Banking Supervision. International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. www.bis.org.

³ Tim Bollerslev. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*. 1986. April 31:3, pp. 307-327.

⁴ Dennis Bams, Jacco L. Wielhouwer. Empirical Issues in Value at Risk Estimation: Time varying Volatility, Fat Tails and Parameter Uncertainty. 1999. www.actuaries.org – pp. 29-50.

Условная гетероскедастичность означает, что условная дисперсия ошибки, т. е. дисперсия при условии известной информации, зависит от времени. Она может проявляться, несмотря на общую гомоскедастичность (безусловную).

Дисперсия ошибки e_t имеет вид

$$\text{var}(e_t) = E(e_t^2) = s_t^2$$

(1)

Но условная дисперсия в соответствии с имеющейся на последний момент информацией определяется как⁵

$$\text{var}(e_t | e_{t-1}) = E(e_t^2 | e_{t-1})$$

(2)

При помощи GARCH-моделей могут решаться вопросы для широкого круга задач с использованием временных рядов. Как правило, решения, которые принимаются в финансовой сфере, основаны на соотношении между риском и доходностью того или иного актива, или портфеля в целом, поэтому эконометрический анализ риска является составной частью ценообразования, оптимизации портфеля, управления рыночным риском⁶.

Для учета требований Базельского комитета по банковскому надзору в модели используется два временных ряда данных: ряд r_t^M – t -дневная доходность рыночного портфеля, характеризующая общий рыночный риск, и r_t^S – t -дневная доходность финансового инструмента, характеризующая специальный рыночный риск. От параметра t в дальнейшем будет зависеть горизонт прогноза, для которого принимается уровень риска.

Пусть

$$r_t^S = a_0 + a_1 \cdot r_{t-1}^M + a_2 \cdot r_{t-2}^M + b_1 \cdot r_{t-1}^S + b_2 \cdot r_{t-2}^S + e_t$$

(3) процесс AR(2) для двух временных рядов данных с ошибкой e_t .

Обобщенная авторегрессионная модель с условной гетероскедастичностью GARCH(2,2) с двумя временными рядами описывает процесс, в котором условная дисперсия ошибки в зависимости от всей доступной в момент времени t информации имеет

⁵ Елисеева И.И.. Эконометрика. М.: Финансы и статистика, 2007. 576 с.

⁶ Robert Engle. The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics. *Journal of Economic Perspectives*. 2001. 15:4 pp. 157-168.

вид модели ARMA(2,2) и определяется как:

$$e_t^2 = g_0 + l_1 \cdot e_{t-1}^2 + l_2 \cdot e_{t-2}^2 + l_1 \cdot u_{t-1}^2 + l_2 \cdot u_{t-2}^2 \quad (4)$$

Модель строится на примере обыкновенных акций РАО «ЕЭС России», для расчета параметров модели использовалась дневная доходность ($t=1$) обыкновенных акций РАО «ЕЭС России», а также в качестве рыночного

портфеля используется индикатор – индекс РТС. По доходностям обыкновенных акций РАО «ЕЭС России» и индекса РТС данные рассматриваются за период с 29 мая 1997 г. по 31 августа 2007 г.

На рис. 1 пунктирной линией изображена дневная доходность обыкновенных акций РАО «ЕЭС России» за рассматриваемый период, а на рис. 2 – дневная доходность ин-

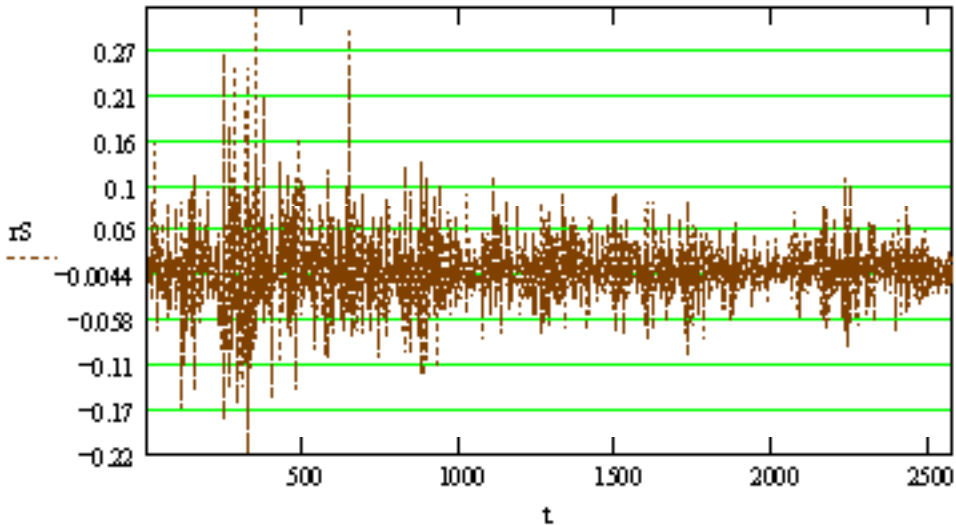


Рис. 1. Доходность обыкновенных акций РАО «ЕЭС России»

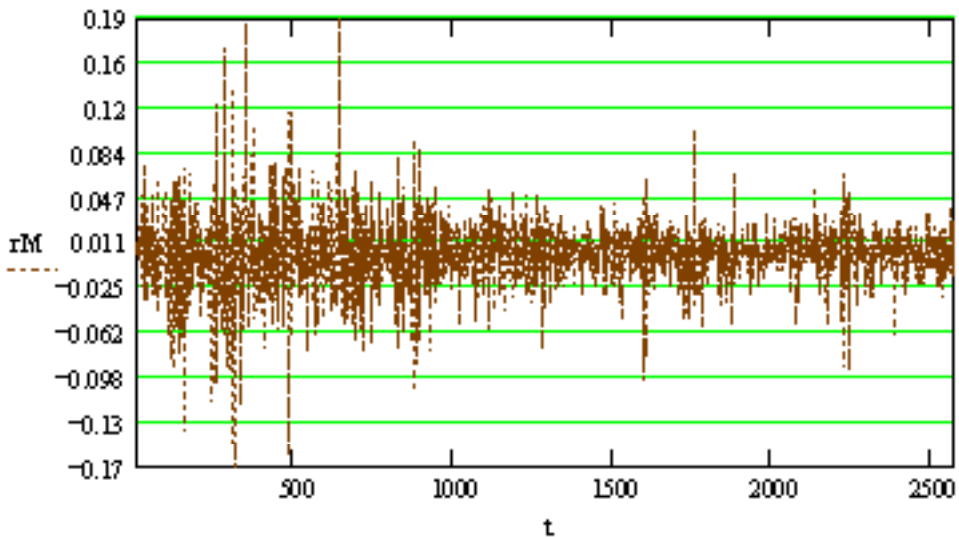


Рис. 2. Доходность индекса РТС

декса РТС, который используется в качестве рыночного портфеля.

Параметры регрессионной модели для дневной доходности принимают следующие значения:

Параметры модели

	AR(2)		GARCH(2,2)
a_1	1.723×10^{-1}	g_1	9.929×10^{-1}
a_2	0.019	g_2	0.210
a_3	0.028	g_3	0.163
b_1	0.011	l_1	0.185
b_2	0.053	l_2	0.149

В качестве наибольшей возможной отрицательной доходности предлагается использовать нижнюю границу доверительного интервала линии регрессии, которая рассчитывается по формуле

$$r_t^{low} = r_t - t_a \cdot \sqrt{e_t^2} \quad (5)$$

где t_a является критическим значением t -критерия Стьюдента с уровнем значимости \bar{b} и $n-m-1$ степенями свободы. Тогда максимальные убытки будут равны

$$VaR_t = V_{t-1} \cdot (r_t - t_a \cdot \sqrt{e_t^2}), \quad (6)$$

где V_{t-1} – стоимость финансового инструмента в момент времени $t-1$.

На рис. 3 пунктирной линией изображена дневная доходность обыкновенных акций

числения максимально возможных отрицательных доходностей, полученные при помощи регрессионной модели с использованием GARCH–процесса.

3. GARCH и дельта-нормальный метод

Дельта-нормальный метод базируется на предположении о нормальном распределении непрерывно наращенной доходности, определенной по формуле (5):

$$r_t = \ln\left(\frac{V_t}{V_{t-1}}\right) \quad (7)$$

где V_t – рыночная стоимость позиции в момент времени t . Согласно данному методу доходность определяется ее математическим ожиданием m_t и среднеквадратическим отклонением s_t . Основываясь на предположении о нормально распределенных доходностях, VaR определяется следующим образом:

$$VaR_t = V_t \cdot (1 - e^{m_t - k_a \cdot s_t}) \quad (8)$$

где m_t – математическое ожидание дневной доходности позиции, s_t – стандартное отклонение дневной доходности позиции, k_a – квантиль нормального распределения, соответствующий вероятности \bar{b} .

Таким образом, наименьшая отрицатель-

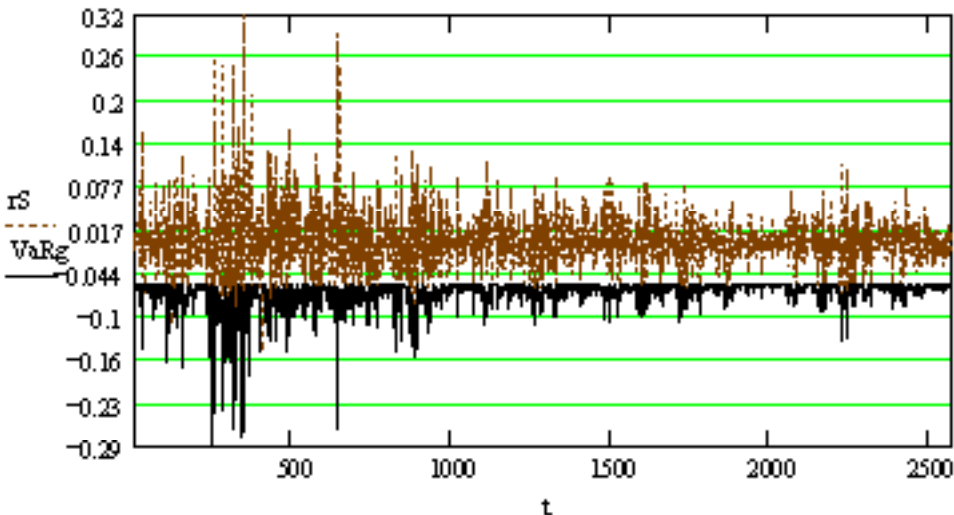


Рис. 3. Доходность акций и VaR (регрессионная модель с GARCH(2,2) – процессом для двух временных рядов)

ная доходность принимает значение:

$$r_t^{low} = \eta - k_a \cdot s_t \tag{9}$$

Дисперсия доходности s_t^2 может быть оценена по историческим данным как на основе обычной выборочной дисперсии, так и с использованием моделей, учитывающих вариацию дисперсии во времени, простейшей из которых является экспоненциальное сглаживание, реализованное в системе RiskMetrics:

$$s_t^2 = \lambda \cdot s_{t-1}^2 + (1 - \lambda) \cdot r_{t-1}^2 \tag{10}$$

где λ – сглаживающий параметр.

Для того чтобы сравнить модели первоначально оценивается параметр модели RiskMetrics λ . Для этих целей разработчик системы RiskMetrics банк J.P. Morgan вводит следующую функцию:

$$\lambda_t^h = \arg \min_{\lambda \in (0,1)} \frac{1}{t-h+1} \sum_{j=1}^{t-h+1} (h \cdot s_j^2(\lambda) - (r_j^h)^2) \tag{11}$$

где $r_j^h = \sum_{l=0}^{h-1} r_{j+l}$, $j=1...t$ – последовательно сложенная h -дневная доходность.

Данная функция минимизируется относительно параметра λ для каждого прогноза.

Согласно нашим наблюдениям $h=1$. Для каждого показателя r_j и s_j ($j=1...t$) 99 раз рассчитывается значение функции (11), в каждом из которых параметр λ принимает значения $\lambda \in \Lambda = \{0.01; 0.02; \dots; 0.99\}$. Первоначально мы исследуем первые 250 наблюдений, рассчитывая λ для каждого следующего шага с учетом всех предыдущих наблюдений. Затем, как только порядковый номер наблюдения t превысит значение 250, начинаем для оценки параметра λ использовать следующие 250 наблюдений, последнее из которых имеет номер t . Значение параметра λ , на котором функция (11) достигает своего минимума для каждого t , принимается за сглаживающий параметр для этого наблюдения⁷.

Таким образом, переоценивая параметры модели RiskMetrics для каждого t_i с временным горизонтом в 1 день, глубиной выборки данных 250 дней и уровне доверия 95%, получим следующий результат, отраженный на рис.4.

Отрицательные показатели доходности лишь в 5 случаях были ниже значений, которые прогнозировались при помощи

⁷ Gloria Gonzalez-Rivera, Tae-Hwy Lee, Emre Yoldas. Optimality of the RiskMetrics VaR Model. Department of economics University of California, Riverside. 2007. www.ucr.edu.

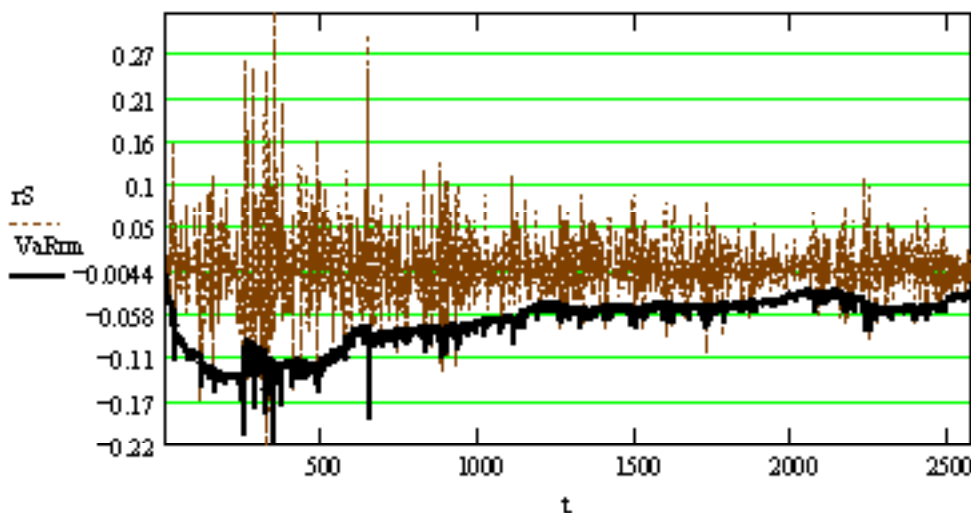


Рис. 4. Доходность акций и VaR (дельта-нормальный метод)

регрессионной модели с GARCH(2,2) – процессом для двух временных рядов при уровне доверия 95 %, что составляет 0,19 % от наблюдений. При использовании дельта-нормального метода, реализованного в системе RiskMetrics, при том же уровне доверия наблюдения превысили максимальный предел в 100 случаях, что составило 3,9 % от наблюдений. Количество ошибок в обеих моделях не превышает уровня доверия в 95 %.

На рис. 4 пунктирной линией изображена дневная доходность обыкновенных акций ПАО «ЕЭС России», сплошной линией – значения максимально возможных отрицательных доходностей, полученные при помощи модели RiskMetrics.

Полученный результат свидетельствует о том, что нормальное распределение недооценивает вероятность в «толстых хвостах», а отсюда и показатель VaR. Регрессионная модель с GARCH(2,2)–процессом дает более точную оценку риска, что говорит о большей эффективности ее использования для прогноза максимального уровня потерь.