И.Н. Федоренко, канд. экон. наук,[1]
г. Череповец

МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОГО ПОРТФЕЛЯ

В статье обосновывается особая актуальность для инвесторов проведение политики, направленную на минимизацию несистемных рисков, связанных с инвестированием в акции. Одним из наиболее проверенных инструментов для решения этой задачи является диверсификация вложения капитала в различные активы, то есть формирование определенных портфелей ценных бумаг.

Ключевые слова: фондовый рынок, акции, эффективный портфель.

Современный рост российского фондового рынка в последние годы привлекает все больше инвесторов как отечественных, так и зарубежных. В то же время данный рынок относится к классу развивающихся, а следовательно, более доходных и рискованных с точки зрения вложения капитала

Увеличение размера рисковых позиций компаний и активизация их деятельности по управлению портфелями финансовых активов ведет к необходимости разработки новых методов анализа финансовых рынков, позволяющих получать более надежные оценки ожидаемых результатов инвестиционной деятельности. Одним из важных направлений исследований является моделирование динамики доходности и волатильности фондового и валютного рынков. Классической задачей финансового управления, в том числе и путем эконометрического анализа, является задача об инвестициях – размещении свободных средств в определенном объеме на конкретный срок. Предполагается, что на рынке существует возможность вложения свободных средств в несколько акций [6].

Подход, использующийся в портфельной теории, состоит из четырех основных этапов:

1. Оценки ценных бумаг – описания всех видов активов с точки зрения ожидаемых дохода и риска.
2. Принятия решений о распределении активов – определения того, каким образом активы должны быть распределены между различными классами инвестиций.
3. Оптимизации портфеля вложений – уравновешивания риска и доходности при выборе ценных бумаг, которые будут включены в портфель вложений, например, определение того, какой портфель акций предлагает наименьший риск при данном уровне ожидаемого дохода.
4. Оценки результатов [3].

Отметим, что для портфельного инвестора, событие, связанное с тем, что отдельные акции падают или поднимаются в цене, не имеет принципиального значения – для него важны только доходность и риск его портфеля в целом [1].

Одной из основных проблем формирования портфеля фондовых активов является поиск оптимальных методов их выбора. С проблемой выбора активов неразрывно связано

---

[1] *Федоренко Ирина Николаевна* – кандидат экономических наук, доцент Института менеджмента и информационных технологий (филиала) Санкт-Петербургского государственного политехнического университета в г. Череповце; e-mail: Fedorenko.irina@mail.ru.

обоснование диверсификации инвестиций, направленной, по выражению Т. Коггина, на «распределение инвестиционного риска среди нескольких различных активов в портфеле в попытке снизить его общий риск» [7].

Таким образом, почти половина риска, присущего отдельным акциям, может быть устранена, если акции входят в состав достаточно диверсифицируемого портфеля, однако некоторый риск всегда остается. Часть риска акций, которую можно устранить, называется диверсифицируемым риском, а часть риска, которая не поддается устранению, называется рыночным риском.

При планировании портфеля в день t_0 вперед необходимо рассчитать оценки ожидаемых доходностей. Для этого используем исторические данные о котировках за предшествующий период по следующей схеме.

По котировкам i-й акции $c_i(t)$ (цена закрытия на день t) вычисляем доходности:

$$r_i(t) = \frac{c_i(t) - c_i(t - T_g)}{c_i(t - T_g)};$$

$$t = t_0 - T + 1, t_0 - T + 2, ..., t_0, \qquad (1)$$

где $r_i(t)$ – доходность i-й акции в момент времени t;

$c_i(t)$ – цена закрытия на день t;

T_g – длина периода, за который рассматривается доходность акций;

T – длина «окна» наблюдения;

t_0 – начальный момент времени.

В данной работе будем рассматривать месячные доходности, то есть T_g = 20 дней (рабочие дни биржи).

Зная доходности для каждого момента времени, можно определить ожидаемую доходность каждого из активов.

Ожидаемая (средняя) доходность инвестиций – это среднее значение (математическое ожидание) вероятностного распределения их доходности. Вычисляем ожидаемую доходность акции i за T дней:

$$E_i = E(r_i\ (t)) = \frac{1}{T} \sum_{t=t_0-T+1}^{t_0} r_i(t);$$

$$i = 1, 2, .., n, \qquad (2)$$

где E_i – ожидаемая доходность акции i за период T_g дней.

Правильным и точным является определение доходности при помощи натурального логарифма, однако в связи с более трудоемкой работой нахождения логарифма почти повсеместно используется первый вариант [5].

Показатель дисперсии измеряют в процентах в квадрате и так как такая интерпретация очень непривычна и тяжела, в качестве другого показателя отклонения значений доходности от ожидаемого значения используется «среднее квадратическое отклонение» (стандартное отклонение), которое является квадратным корнем из дисперсии.

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2}\ . \qquad (3)$$

Зная ожидаемые доходности и показатели риска (стандартное отклонение), необходимо произвести еще ряд расчетов по определению коэффициентов ковариации и корреляция. После расчета данных коэффициентов станет возможным формирование портфелей, соответствующих требованиям по риску и доходности.

Ковариация – это мера, учитывающая дисперсию индивидуальных значений доходности бумаги и силу связей между изменениями доходностей данной бумаги и других. Более простое определение ковариации – это мера взаимодействия двух случайных переменных.

Формула для расчета ковариации следующая:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=t_0-T+1}^{t_0} (r_i\ (t) - E_i)(r_j\ (t) - E_j);$$

$$i, j = 1, ..., n, \qquad (4)$$

где σ_{ij} – ковариация доходностей акций i и j;

$r_i(t)$ и $r_j(t)$ – доходности активов i и j;

E_i и E_j – ожидаемые (средние) доходности активов i и j.

Кроме того, верно

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij}. \qquad (5)$$

Интерпретация коэффициента следующая: положительное значение ковариации говорит о том, что значения доходности этих акций изменяются в одном направлении, отрицательное значение ковариации говорит о разнонаправленных движениях между доходностями. Ковариация является низкой, если колебания доходностей двух активов в любую сторону носят случайный характер.

Интерпретировать ковариацию, так же как и дисперсию, довольно тяжело ввиду больших численных значений, поэтому практически всегда для измерения силы взаимосвязи между двумя активами используется коэффициент корреляции.

Расчет корреляции осуществляется по формуле:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j}, \qquad (6)$$

где ρ_{ij} – корреляция между доходностями i-й и j-й ценных бумаг;

σ_{ij} – ковариация доходностей акций i и j;

σ_i и σ_j – стандартные отклонения активов i и j.

Коэффициент корреляции лежит в интервале от -1 до +1. Значение корреляции +1 говорит о сильной взаимосвязи, т. е. активы ходят одинаково, значение -1, наоборот, свидетельствует о разнонаправленности, т. е. рост одного из активов сопровождается падением другого. Значение 0 говорит об отсутствии корреляции.

Из всего разнообразия различных теорий нами была выделена модель, созданная в 1950 г. нобелевским лауреатом Гарри Марковицем и получившая название «модель Марковица», поскольку ее несомненным достоинством является строгая математическая формулировка, что обеспечивает максимальную объективность результатов. Модель лежит в основе инвестиционного планирования в условиях неопределенности, являясь существенным элементом теории рынка капитала.

Модель Марковица основана на следующих принципах. Пусть инвестор имеет сегодня (в момент времени t = 0) ликвидные средства. Начальное имущество расходуется полностью, а именно, на ценные бумаги (акции «второго эшелона»), цена покупки которых определена. Но возвратные потоки (дивиденды плюс будущая динамика курса) нельзя надежно спрогнозировать. Известно лишь распределение вероятностей (в нашем случае они равновероятны) [8]. Мы ищем эффективный портфель акций для инвестора, не расположенного к риску, который принимает свои решения на основе математического ожидания (E) и дисперсии (σ^2).

Модель эффективных портфелей Марковица, позволяющая определить доли акций «второго эшелона» в портфеле, обеспечивающие инвестору минимальный риск при заданном уровне доходности, выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \sigma_p^2(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \to \inf, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i E_i = E_э, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \end{cases} \qquad (7)$$

где $\sigma_p^2(X)$ – дисперсия портфеля или суммарный риск портфеля;

$x_1,\dots,x_n$ – доли ценных бумаг (акций «второго эшелона») в портфеле инвестора;

σ_{ij} – ковариация доходностей акций i и j.;

E_i – ожидаемая доходность акции i;

$E_э$ – требуемая доходность эффективного портфеля.

При формировании оптимального портфеля ценных бумаг будем рассматривать шесть значений требуемой доходности $E_э$, которые определяются по следующей формуле:

$$E_{эi} = E_{\min} + hm, \qquad (8)$$

где $m = \overline{0,5}$; $i = \overline{1,6}$;

$$h = \frac{E_{\min} + E_{\max}}{5}, \qquad (9)$$

где $E_{\min}$ – минимальная доходность;

$E_{\max}$ – максимальная доходность.

Для удобства при дальнейших расчетах запишем систему (7) в матричном виде:

$$\begin{cases} f(x) = X^T \Sigma X \ , \\ EX = E_э, \\ eX = 1, \end{cases} \qquad (10)$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$,

$E = \left(E_1, E_2 \dots, E_n\right)$, $e = (1, \dots, 1)$,

$E_э$ – требуемая доходность эффективного портфеля,

n – количество активов в портфеле.

Задача (7) предполагает отсутствие ограничений на доли активов. Но для более полного описания процесса формирования портфеля акций необходимо рассмотреть и случай наличия условия неотрицательности долей ценных бумаг.

Задача минимизации риска инвестора при наличии ограничений-равенств относится к классу задач нелинейного программирования, а именно квадратичного программирования, для которых целевая функция $f\left(\overline{X}\right)$ – квадратичная, выпуклая, а все ограничения – линейны.

Проблему минимизации можно решить, используя метод неопределенных множителей Лагранжа [4].

Для этой цели оставшиеся дополнительные ограничения путем преобразований надо приравнять к нулю, взвесить их, применяя множители Лагранжа, и подставить в целевую функцию. Тогда функция Лагранжа в общем виде будет выглядеть следующим образом:

$$\min L(X, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_j x_i \sigma_{ji} +$$
$$+ \lambda_1 (\sum_{i=1}^{n} x_i E_i - \mathrm{E}_э \ ) + \lambda_2 (\sum_{i=1}^{n} x_i - 1)$$

или

$$L(X, \lambda_1, \lambda_2) = X^T \Sigma X + \lambda \left(\begin{pmatrix} E \\ e \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} E_э \\ 1 \end{pmatrix} \right), \qquad (11)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ – вектор множителей Лагранжа.

Для определения процентных долей, которые минимизируют риск, необходимо приравнять производные функции Лагранжа по x_i ($i = \overline{1, n}$), по λ_1 и по λ_2 к нулю. Таким образом, возникнет система (n+2) линейных уравнений с (n + 2) неизвестными. Система уравнений имеет следующую структуру:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_{ij} + \lambda_1 E_i + \lambda_2 = 0, = 0 \\ \dfrac{\partial L(X, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i - E_э = 0 \\ \dfrac{\partial L(X, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} = \sum_{j=1}^{n} x_i - 1 = 0 \end{cases} . \qquad (12)$$

Если мы решим эту систему уравнений для разных значений $E_э$, то получим структуру портфеля, минимизирующую риск.

В матричной форме записи система уравнений (12) имеет следующую структуру:

$$\begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1n} & \mathrm{E}_1 & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \dots & 2\sigma_{2n} & \mathrm{E}_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n1} & \dots & 2\sigma_{n1} & \mathrm{E}_\mathrm{n} & 1 \\ \mathrm{E}_1 & \mathrm{E}_2 & \dots & \mathrm{E}_\mathrm{n} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \\ \lambda_1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ E_э \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

Обозначим левую матрицу через .

$$C = \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1n} & \mathrm{E}_1 & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \dots & 2\sigma_{2n} & \mathrm{E}_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \dots & 2\sigma_{nn} & \mathrm{E}_\mathrm{n} & 1 \\ \mathrm{E}_1 & \mathrm{E}_2 & \dots & \mathrm{E}_\mathrm{n} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица C невырожденная, что является необходимым и достаточным условием существования обратной матрицы C^{-1}. Тогда

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \\ \lambda_1 \\ \lambda \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ E_э \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Для нахождения вектора распределения активов в портфеле можно использовать формулу:

$$X = B_1 \cdot E_э + B_2. \qquad (15)$$

Причем X, B_1, B_2 – вектор-столбцы размерности n.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \; B_1 = \begin{bmatrix} в_{11} \\ в_{12} \\ \dots \\ x_{1n} \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} в_{21} \\ в_{22} \\ \dots \\ x_{2n} \end{bmatrix}, \qquad (16)$$

где

$$в_{11} = (-1)^{n+2} \frac{\left\| \begin{matrix} 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \dots & 2\sigma_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \dots & 2\sigma_{nn} & 1 \\ \mathrm{E}_1 & \mathrm{E}_2 & \dots & \mathrm{E}_n & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{matrix} \right\|}{|C|}, \dots$$

$$в_{1n} = (-1)^{2n+1} \frac{\left\| \begin{matrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1n} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \dots & 2\sigma_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2\sigma_{n-11} & 2\sigma_{n-11} & \dots & 2\sigma_{n-11} & 1 \\ \mathrm{E}_1 & \mathrm{E}_2 & \dots & \mathrm{E}_n & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{matrix} \right\|}{|C|},$$

$$в_{21} = (-1)^{n+3} \frac{\left\| \begin{matrix} 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \dots & 2\sigma_{2n} & \mathrm{E}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \dots & 2\sigma_{nn} & \mathrm{E}_n \\ \mathrm{E}_1 & \mathrm{E}_2 & \dots & \mathrm{E}_n & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{matrix} \right\|}{|C|}, \dots$$

$$в_{2n} = (-1)^{2n+2} \frac{\left\| \begin{matrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1n} & \mathrm{E}_1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \dots & 2\sigma_{2n} & \mathrm{E}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2\sigma_{n-11} & 2\sigma_{n-12} & \dots & 2\sigma_{n-1n} & \mathrm{E}_n \\ \mathrm{E}_1 & \mathrm{E}_2 & \dots & \mathrm{E}_n & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{matrix} \right\|}{|C|}.$$

Полученное решение системы уравнений и определяет структуру портфеля, минимизирующую риск.

Таким образом, определив доли акций, входящих в портфель, найдем минимальный риск соответствующий эффективной доходности.

$$\begin{aligned} \sigma_э^2 &= X^T \Sigma X = (B_1 E_э + B_2)^T \Sigma (B_1 E_э + B_2) = \\ &= B_1^T \Sigma B_1 E_э^2 + (B_1^T \Sigma B_2 + B_2^T \Sigma B_1) E_э + B_2^T \Sigma B_2. \end{aligned} \qquad (17)$$

Введем дополнительные переменные:

$$\begin{aligned} \alpha &= B_1^T \Sigma B_1, \\ \beta &= B_1^T \Sigma B_2, \\ \gamma &= B_2^T \Sigma B_2. \end{aligned} \qquad (18)$$

Тогда запись (17) можно упростить:

$$\sigma_э^2 = \alpha E_э^2 + 2\beta E_э + \gamma. \qquad (19)$$

Извлекая квадратный корень из (19), получим минимальный риск эффективного портфеля:

$$\sigma_э = \sqrt{\sigma_э^2} = \sqrt{\alpha E_э^2 + 2\beta E_э + \gamma}. \qquad (20)$$

В данном случае инвестор по каждому активу находится в длинной позиции. Длинная позиция – это обычно покупка актива с намерением его последующей продажи (закрытие позиции). Такая покупка обычно осуществляется при ожидании повышения цены актива в надежде получить доход от разности цен покупки и продажи.

Из-за недопустимости коротких позиций в данной модели на доли ценных бумаг в портфели накладывается условие неотрицательности. Поэтому особенностью этой модели является ограниченность доходности допустимых портфелей, т. к. доходность любого стандартного портфеля не превышает наибольшей доходности активов, из которых он построен.

Перейдем к анализу модели эффективных портфелей Марковица (7) при наличии условия неотрицательности на доли входящих в портфель акций.

Для решения данной задачи необходимо сформулировать теорему Куна-Таккера 1.

Итак, требуется найти min $f(X)$, при условиях:

$$\begin{cases} g_1(X) \geq 0, \\ .... \\ g_m(X) \geq 0, \\ X \geq 0. \end{cases} \quad (21)$$

Теорема 1. Пусть функции f, g_1, g_2, ..., g_m – дифференцируемы, и

$$L(X, \lambda_1, \lambda_2) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X)$$

– функция Лагранжа. Для того чтобы вектор X_0 был решением общей задачи нелинейного программирования необходимо, чтобы вектор X_0 и некоторый вектор λ удовлетворяли условиям:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^o \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \geq 0, i = 1, 2, ...n, \quad (22)$$

причем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i} \cdot x_i^0 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0 \quad (23)$$

и

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0 \quad (24)$$

Условия (23) и (24) называются условиями дополняющей нежесткости.

Рассмотрим задачу нелинейного программирования в случае ограничений-равенств:

$$\begin{cases} g_1(X) = 0, \\ .... \\ g_m(X) = 0, \\ X \geq 0. \end{cases} \quad (25)$$

В этом случае условия Куна-Таккера формулируются следующим образом. Пусть функции f, g_1, g_2, ..., g_m – дифференцируемы по X. Для того чтобы вектор X_0 являлся оптимальным решением, необходимо, чтобы существовал такой λ_0, что X_0 и λ_0 удовлетворяют условиям

1. $\dfrac{\partial L(X_o, \lambda_o)}{\partial x_i} \geq 0 \quad i = 1,2,...,n$, причем

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^o \frac{\partial L(X_o, \lambda_o)}{\partial x_i} = 0; \quad (26)$$

2. $\dfrac{\partial L(X_o, \lambda_o)}{\partial \lambda_i} = 0. \quad (27)$

Применим эти условия для формирования оптимальной структуры портфеля ценных бумаг:

$$\begin{cases} X^T \Sigma X \to \min, \\ \begin{pmatrix} E \\ e \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} E_э \\ 1 \end{pmatrix}, \\ X \geq 0, \end{cases} \quad (28)$$

$E = (E_1, E_2, ..., E_n)$, $e = (1, ..., 1)$.

Составим функцию Лагранжа для задачи (28)

$$L(X, U) = X^T \Sigma X + \lambda \left(\begin{pmatrix} E \\ e \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} E_э \\ 1 \end{pmatrix} \right). \quad (29)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial (X^T \Sigma X)}{\partial X} = 2\Sigma X.$$

Тогда получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X, \lambda)}{\partial X} = 2\Sigma X + E^T e^T \lambda^T \geq 0, \\ x_i \dfrac{\partial L(X, \lambda)}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, ..., n. \end{cases} \quad (30)$$

Обозначим $\overline{\mu} = 2\Sigma \overline{X} + \overline{E}^T \overline{e}^T \overline{\lambda}^T$. Тогда решением (28) является решение системы:

$$\begin{cases} 2\Sigma X + (E^T e^T) \lambda^T = \mu, \\ \begin{pmatrix} E \\ e \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} E_э \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mu_i x_i = 0, i = 1, 2, ..., n, \\ \mu \geq 0, \\ X \geq 0. \end{cases} \quad (31)$$

Учитывая, что

$$C = \begin{pmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1n} & -E_1 & -1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \dots & 2\sigma_{2n} & -E_2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \dots & 2\sigma_{nn} & -E_n & -1 \\ E_1 & E_2 & \dots & E_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

решение можно записать:

$$\begin{pmatrix} X \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} \mu \\ E_э \\ 1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

или

$$X = B\mu + B_1 E_э + B_2,$$
$$\mu \geq 0, X \geq 0, \mu_i x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n, \quad (33)$$

если матрицу C^{-1} записать как:

$$C^{-1} = D = \begin{pmatrix} B & B_1 \underline{\quad} B_2 \\ D' & D_1' \end{pmatrix},$$

где B – матрица размером $n \cdot n$, ,

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \dots \\ b_{1n} \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ \dots \\ b_{2n} \end{pmatrix},$$

$$D' = \begin{pmatrix} d_{n+11} & d_{n+12} & \dots & d_{n+1n} \\ d_{n+21} & d_{n+22} & \dots & d_{n+2n} \end{pmatrix},$$

$$D_1' = \begin{pmatrix} d_{n+1n+1} & d_{n+1n+2} \\ d_{n+2n+1} & d_{n+2n+2} \end{pmatrix}.$$

Определим риск портфеля $\sigma_э$, соответствующий эффективной доходности:

$$\begin{aligned} \sigma_э^2 &= X^T \Sigma X = (B\mu + B_1 E_э + B_2)^T \times \\ &\times \Sigma (B\mu + B_1 E_э + B_2) = \\ &= B^T \mu^T \Sigma B\mu + (B^T \mu^T \Sigma B_1 + B_1^T \Sigma B\mu) E_Э + \\ &+ (B^T \mu^T \Sigma B_2 + B_2^T \Sigma B\mu) + B_1^T \Sigma B_1 E_э^2 + \\ &+ (B_1^T \Sigma B_2 + B_2^T \Sigma B_1) E_э + B_2^T \Sigma B_2. \end{aligned} \quad (34)$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha = B_1^T \Sigma B_1, \beta = B_1^T \Sigma B_2, \gamma = B_2^T \Sigma B_2,$$
$$\chi = B^T \mu^T \Sigma B_1, \eta = B_2^T \Sigma B\mu, \psi = B^T \mu^T \Sigma B\mu. \quad (35)$$

Тогда формула (36) запишется в следующем виде:

$$\sigma_э^2 = \alpha E_э^2 + 2(\beta + \chi) E_э + \gamma + 2\eta + \psi, \quad (36)$$

а минимальный риск эффективного портфеля:

$$\sigma_э = \sqrt{\sigma_э^2} = \quad (37)$$
$$= \sqrt{\alpha E_э^2 + 2(\beta + \chi) E_э + \gamma + 2\eta + \psi}.$$

Очевидно, что на вычисление ковариационной матрицы и строки доходностей влияет длина статистического «окна».

С целью определения этого влияния проведем серию экспериментов по следующему плану.

Наряду с основной длиной «окна», равной 20 дням, будем рассматривать «окна» длины 40 дней (два месяца) и 60 дней (три месяца).

В качестве характеристик влияния длины «окна» будем наблюдать расхождения в долях эффективного портфеля и рисках при заданных эффективных доходностях.

В качестве объекта исследования возьмем акции «второго эшелона».

Временной промежуток исследования $[Y_0, Y_1]$ необходимо выбрать такой, на протяжении которого были бы известны котировки всех вышеперечисленных акций.

Обозначим через $[Y_0, Y_1]$ временной интервал исследования, на котором известны месячные доходности акций, входящих в портфель. Интервал $[Y_0, Y_1]$ необходимо выбрать таким, чтобы были известны доходности акций за $T + 1$ дней до его начала, то есть на промежутке $[Y_0 - T + 1, Y_0]$.

В качестве параметра формирования портфеля будем использовать шаг управления портфелем T_u = 20 дням – временной промежуток, через который мы будем пересматривать портфель.

Тогда моменты пересмотра портфеля выразятся в виде:

$$z_{k+1} = z_k + T_u, k = 0, 1, \dots, K; \quad (38)$$

$$z_0 = Y_0; \quad (39)$$

$$K = \left[\frac{Y_1 - Y_0}{T_u} \right], \quad (40)$$

где $\left[\dfrac{Y_1 - Y_0}{T_и}\right]$ – целая часть числа.

При этом ожидаемая доходность i-й акции E_i за месяц ($T = 20$) и ковариации доходностей на момент времени $Y_0 = z_0$ определяются по формулам соответственно:

$$E_i = \frac{1}{20}\sum_{y=y_0-19}^{y_0} r_i(y),\ i = 1,2,..,n, \tag{41}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{20}\sum_{y=y_0-19}^{y_0} (r_i\ (y) - E_i)(r_j\ (y) - E_j), \tag{42}$$
$$i, j = 1,...,n.$$

При T = 40 ожидаемая доходность i-й акции E_i за два месяца и ковариации доходностей на момент времени z_1 определяются по формулам соответственно:

$$E_i = \frac{1}{40}\sum_{y=y_0-19}^{z_1} r_i(y),\ i = 1,2,..,n, \tag{43}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{40}\sum_{y=y_0-19}^{z_1} (r_i\ (y) - E_i)(r_j\ (y) - E_j), \tag{44}$$
$$i, j = 1,...,n.$$

Аналогично для T = 60 ожидаемая доходность i-й акции E_i за два месяца и ковариации доходностей на момент времени z_2 определяются по формулам соответственно:

$$E_i = \frac{1}{60}\sum_{y=y_0-19}^{z_2} r_i(y),\ i = 1,2,..,n. \tag{45}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{60}\sum_{y=y_0-19}^{z_2} (r_i\ (y) - E_i)(r_j\ (y) - E_j), \tag{46}$$
$$i, j = 1,...,n.$$

Таким образом, в ходе нашего эксперимента будем наблюдать изменения удельных весов каждой акции в портфеле, а также изменения рисков портфеля в зависимости от длины «окна» наблюдения.

Для исследования будем рассматривать случай наличия условия неотрицательности долей ценных бумаг, входящих в исследуемый портфель.

Если на вектор X накладывается условие неотрицательности, то, применив формулу (15) и (16) (в случае невырожденности матрицы C) или инструмент «Поиск решения» в Excel для заданного уровня эффективных доходностей $E_э$ при различных длинах статистических «окон», получим векторы распределения долей и риски на каждый момент пересмотра портфеля:

$$X^1(E_э, T) = \begin{pmatrix} x_1(E_э, T) \\ x_2(E_э, T) \\ ..... \\ x_{30}(E_э, T) \end{pmatrix},$$
$$\sigma^1\left(E_э, T\right),\ \text{для } T = 20, \tag{47}$$

$$X^2(E_э, T) = \begin{pmatrix} x_1(E_э, T) \\ x_2(E_э, T) \\ ..... \\ x_{30}(E_э, T) \end{pmatrix},$$
$$\sigma^2\left(E_э, T\right),\ \text{для } T = 40, \tag{48}$$

$$X^3(E_э, T) = \begin{pmatrix} x_1(E_э, T) \\ x_2(E_э, T) \\ ..... \\ x_{30}(E_э, T) \end{pmatrix},$$
$$\sigma^3\left(E_э, T\right),\ \text{для } T = 60. \tag{49}$$

При наличии ограничения на вектор X для нахождения вектора распределения долей и соответствующего риска при различных T будем использовать процедуру «Поиска решения» в Excel.

На основе эффективных портфелей Марковица опишем процедуру управления портфелем. Формализация описания процесса управления позволяет минимизировать случайные факторы, количественно оценить результаты и ввести необходимые корректировки.

Обозначим через $[Y_0, Y_1]$ временной интервал исследования, на котором известны месячные доходности акций, входящих в портфель. Интервал $[Y_0, Y_1]$ необходимо выбрать таким, чтобы были известны доходности акций за $T + 1$ дней до его начала, то есть на промежутке $[Y_0 - T + 1, Y_0]$.

В качестве параметров формирования портфеля будем использовать заданное значение ожидаемой доходности портфеля $E_э$ и шаг управления портфелем T_u – временной промежуток, через который мы будем пересматривать портфель.

Тогда моменты управления выразятся в виде:

$$z_{k+1} = z_k + T_u,\ k = 0,1,...,K; \tag{50}$$

$$z_0 = Y_0; \tag{51}$$

$$K = \left[\frac{Y_1 - Y_0}{T_u}\right], \tag{52}$$

где $\left[\frac{Y_1 - Y_0}{T_u}\right]$ – целая часть числа.

Для каждого момента z_k при заданной эффективной доходности $E_э$ рассчитываются параметры портфеля: распределение долей

$$X_э(z_k) = \begin{pmatrix} x_{1э}(z_k) \\ x_{2э}(z_k) \\ .... \\ x_{nэ}(z_k) \end{pmatrix}$$

(по формуле (15) – случай коротких позиций) и риск эффективного портфеля $\sigma_э$ (по формуле (20)).

В качестве оценок доходностей и ковариаций акций в модели (7) используются показатели:

$$E_i = \frac{1}{T}\sum_{t=z_k-T+1}^{z_k} r_i(t), \quad i = 1,2...,n, \tag{53}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=z_k-T+1}^{z_k} (r_i(t) - E_i)(r_j(t) - E_j), \quad i,j = 1,2,...,n, \tag{54}$$

где E_i (E_j) – ожидаемая доходность i-й (j-й) акции;

T – длина «окна» наблюдения;

$r_i(t)$ ($r_j(t)$) – доходность i-й (j-) акции в момент времени t, $t \in [z_k - T + 1, z_k]$;

σ_{ij} – ковариация доходностей акций i и j;

n – количество акций в портфеле.

Здесь следует отметить, что если при решении задачи (28) ожидаемое значение доходности окажется меньше эффективной доходности для всех i, то есть $E_i < E_э, \forall i = \overline{1,n}$, то портфель не формируется, акции продаются и следующий портфель формируется уже на следующий месяц.

Список использованных источников

1. Бригхем Ю., Эрхардт М. Финансовый менеджмент. 10-е изд. / пер. с англ. под ред. Е.А. Дорофеева. СПб.: Питер, 2005. 960 с.
2. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Киев: Высшая школа, 1975. 320 с.
3. Райзберг Б.А., Лозовский Л.Ш., Стародубцева Е.Б. Современный экономический словарь. 5-е изд., перераб. и доп. М., 2006. 644 с.
4. Хемди А. Таха. Введение в исследование операций. 7-е изд. / пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. 912 с.
5. Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции / пер. с англ. М.: ИНФРА-М., 2001. 1028 с.
6. Чалдаева Л.А., Федоренко И.Н. Практические аспекты использования финансовой эконометрики при проведении аудита операций с ценными бумагами // Международный бухгалтерский учет. 2012. № 2. С. 48–54.
7. Handbook of modern finance. Editor D.E. Logue. Warren, Gorham & Lamont: Boston – New York, 1984.
8. Markowitz H. Portfolio Selection // Journal of Finance. 1952. Vol. 7. № 1.