

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Н.Е. Мисюра,
С.С. Жилин,
В.В. Бекчурин, аспирант,¹
г. Екатеринбург

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЫНОЧНОГО СПРОСА НА ЖИЛУЮ НЕДВИЖИМОСТЬ

На примере исследования колебаний спроса на жилую недвижимость в городе Екатеринбурге показана актуальность использования статистической динамической модели при решении маркетинговых задач. Изложены принципы построения статистической динамической модели количественного маркетинга и рыночного спроса на основе сплайн-технологии.

Ключевые слова: дифференциальные модели, эконометрика, микроэкономика, скорость продаж, факторы рыночных воздействий, методы усреднения, сплайн-технологии, экономическая цикломатика, экономическая динамика, рынок недвижимости.

Основываясь на исторических сведениях [1, 2], можно сделать вывод, что появление методов экономико-математического моделирования относится ко времени начала промышленной революции. К этому времени относится также начало формирования академий и научных сообществ в Европейских государствах, что отражало возрастающую роль науки в решении сначала фундаментальных, а в последующем и прикладных задач.

Усилиями таких ученых, как Д. Бернулли (1738), Ф. Кенэ (1766), О. Курно (1838), У. Джевсон (1862), К. Маркс (1867), Г. Мур (1911), Ч. Кобб и П. Дуглас (1928), Л. Вальрас, В. Парето, Ф. Эджворт, Дж. Нейман и О. Морнгерштерн (1944) в экономическую науку был введен математический язык.

В XX в. математическое моделирование окончательно утвердилось в экономике как в науке.

Стоит отметить, что практически всем применениям математических методов в экономических исследованиях предшествовала широкая их апробация при решении естественно-научных и технических задач. Исключение составляют теория вероятностей и математическая статистика, которые появились в связи с оценкой вероятности выигрыша в азартной игре, и носят явно «экономический» характер в первоначальной постановке задачи. Такие математико-статистические исследования, как статистические методы парной и множественной регрессии, теории корреляции, проверки гипотез, теории ошибок, выборочного исследования, выполненные в конце XIX в. Ф. Гальтоном, Р. Гамильтоном, К. Пирсоном, Р. Фишером и другими, апробированные при построении теорий массового обслуживания, при проведении демографических исследований, при оценке погрешностей экспериментальных наблюдений и в других областях, послужили хорошим фундаментом для многих экономических теорий [3].

¹ Мисюра Наталья Евгеньевна – старший преподаватель кафедры прикладной математики Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина; e-mail: n_misura@mail.ru.

Жилин Сергей Сергеевич – директор ООО «Эксперт-Девелопмент»; e-mail: gss.1@mail.ru.

Бекчурин Владислав Витальевич – аспирант кафедры теоретической механики Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина; e-mail: mr.vladiator@yandex.ru.

В современном информационном обществе все большее внимание уделяется решению задач микроэкономики, когда объектом исследования является деятельность отдельного предприятия, локального рынка или домохозяйства. Соответствующая научно обоснованная и апробированная математическая модель, будучи реализованная в виде компьютерной программы, позволит пользователю не только вести традиционный учет своей хозяйственной деятельности, но и решать многовариантные задачи оптимального управления этой деятельностью с получением прогнозов по реакции микроэкономической системы на основные факторы экзогенного воздействия.

В настоящее время в микроэкономике рассматривают различные группы математических моделей: статические и динамические, аналитические и эконометрические. Первое разделение принято проводить с учетом фактора времени, а второе с учетом применения либо аналитических, либо статистических методов.

Наличие фактора времени не является единственным критерием для отнесения той или иной модели к динамической. Традиционное описание нестационарного процесса развития произвольной экономической системы в виде функциональной зависимости ее параметров от времени не отражает главной отличительной особенности любой динамической системы – ее изменение при внешних воздействиях. При этом именно такой подход в описании поведения динамических систем принят в естественно-научных исследованиях. Соответствующими динамическими математическими моделями при этом являются в общем случае системы дифференциальных уравнений, с помощью которых устанавливаются связи между выбранными мерами внешних воздействий и мерами состояний динамических систем. Для исследования подобных моделей могут быть выбраны либо численные, либо аналитические методы, позволяющие после проведенной их ве-

рификации выполнить прогнозные оценки реальных экономических ситуаций. Примером динамической модели по критерию фактора времени служит широко известная «трендовая модель» о связи объема спроса или объема предложения с временным интервалом [4]. Примерами действительно динамических детерминистических экономико-математических моделей является модель межотраслевого баланса, разработанная В. Леонтьевым (1924) [5].

Перспективным направлением в решении задач микроэкономики является введение в динамические модели эконометрических подходов в силу вероятностного характера параметров, присутствующих в экономическом анализе. Продуктивность такого подхода вытекает из его успешного применения во многих естественно-научных и прикладных задачах, когда параметры какой-либо динамической системы являются случайными величинами заданного распределения или статистическим ансамблем. В этом случае возникает задача построения путем некоего усреднения, другой динамической системы – с так называемыми эффективными параметрами. Новая усредненная динамическая система описывает уже поведение ансамбля динамических систем, интегрально отражая их основные изменения под действием различных факторов.

Решения, получаемые с использованием статистической динамической модели, позволят оценивать реакцию заданной микроэкономической системы в некотором перспективном временном интервале на те внешние факторы воздействия, которые использовались при верификации модели. В связи с этим такую динамическую модель можно отнести к категории прогнозных моделей, особенно востребованных в реальных секторах экономики, в частности при оценке будущего спроса в решении маркетинговых задач.

Построение прогнозных моделей, изучающих причинно-следственную связь, от-

носится к казуальным исследованиям, в которых используются вполне определенные методы. К основным методам относятся: корреляционно-регрессионный анализ, метод ведущих индикаторов, метод обследования намерений потребителей [6]. Использование динамических моделей в качестве прогнозных может включать и интерполяционные методы. По ретроспективным изменениям параметров системы, представленным в аналитической форме, определяются экзогенные факторы влияния, которые затем используются для оценки поведения соответствующего временного ряда в ближайшей и среднесрочной перспективе.

Самым распространенным методом прогнозирования является метод экстраполяции, при котором по ретроспективным наблюдениям за параметрами экономической системы, представленным в той или иной форме, делается аналитическое продолжение функциональных зависимостей [7]. К недостаткам этого подхода следует отнести отсутствие связи между именными параметрами системы и факторами воздействия.

В качестве примера построения динамической модели в данной работе рассматривается изменение параметров рыночного спроса на рынке жилой недвижимости. Анализ динамики жилищного строительства в РФ и оценка роли рынка недвижимости как социально-экономической системы [8, 9] показывают, что строительство нового жилья в период переходной экономики в целом по стране уменьшилось примерно в два раза к концу 90-х гг., по сравнению с достигнутым к концу предыдущего десятилетия. При этом отмечается роль строительной отрасли в развитии общества, различных отраслей народного хозяйства и экономики в целом, в частности ее влияние на оживление инвестиционной деятельности: развитие жилищного строительства; развитие инфраструктуры и сопряженных производств; снижение уровня безработицы посредством создания новых рабочих мест; консолидацию общества на выполне-

ние конструктивных, созидательных целей; рациональное расселение и улучшение демографической ситуации.

Работа по сохранению и, по возможности, усилению отмеченного выше влияния отрасли жилищного строительства на социально-экономическое развитие и вывод отрасли на требуемый уровень проводится как на уровне государственной политики, так путем активизации частной инициативы. Полученный же опыт в преодолении экономических кризисов в современной России послужил мотивацией создания институциональных механизмов управления. С 2006 г. начали осуществляться национальные проекты социального характера. В 2008 г. руководством страны поставлена задача разработки стратегического плана социально-экономического развития на период до 2020 г. Для этого на уровне субъектов федераций были разработаны концепции регионального развития, встраиваемые в общую систему федерального стратегического развития, и соответствующие нормативные документы. В Екатеринбурге решением городской думы от 26.10.10 № 67/30 была утверждена новая редакция разработанного в 2003 г. Стратегического плана Екатеринбурга. Наличие таких планов предопределяет развитие экономики России, и в частности отрасли жилищного строительства.

Определение перспективного влияния плановых показателей является частным решением задачи построения динамической модели рыночного спроса на рынке жилой недвижимости, а основным – выявление и измерение экзогенных факторов воздействия (детерминант). Отличительной особенностью предлагаемого подхода, по сравнению с традиционными коллигационными методами исследования, является присутствие в модели инструмента аналитического анализа и, как следствие, инструмента управления.

При построении динамической модели предлагаются следующие ее этапы: 1 – ана-

лиз рынка недвижимости с целью выбора его количественных индикаторов; 2 – определение параметров измерения рынка; 3 – формулировка основных гипотез; 4 – выбор математической модели, отражающей связь параметров изменения рынка с факторами воздействия; 5 – выбор адекватных способов описания временных рядов; 6 – выбор современного инструментария в виде доступных и апробированных систем компьютерной математики.

На рынке жилой недвижимости существуют разные виды объектов, разных строительных компаний. Исходя из определения рыночного спроса как «общего объема продаж применительно к рынку товара в данном месте и в данный период для совокупности марок или конкурирующих фирм» [10] (в случае рынка недвижимости речь может идти о совокупности различных видов жилой недвижимости и конкурирующих застройщиков), одной из его возможных характеристик, позволяющих оценивать динамику рыночного спроса, может служить величина объема продаж в единицу времени – скорость продаж. Для отдельного участника рынка или для отдельной группы товаров при его стационарном состоянии этот показатель фиксирован и не может быть изменен. Фиксированный угловой коэффициент линейного приближения в аналитической записи изменения объема спроса от времени в трендовой модели и является, по сути, скоростью продаж. Сравнение объемов реализации одной группы товаров разных производителей или сравнение объемов реализации различных товаров одного производителя является основанием к анализу воздействующих на рынок факторов. Установление закономерных связей между факторами воздействия и рыночным спросом и позволят предпринять действия, ориентированные на увеличение скорости продаж, т. е. стимулирование спроса.

Динамической характеристикой происходящих на рынке процессов может слу-

жить также средневзвешенная скорость продаж различных товаров на данном рынке, на группе рынков и глобальном рынке. К примеру, скорость продаж в денежном выражении квартир в новостройках конкретного застройщика в месяц или скорость продаж квартир в новостройках в целом по городу. Аналогичные характеристики могут быть введены и для других объектов недвижимости, а также для всей продаваемой недвижимости.

Определим средневзвешенную скорость продаж различных групп недвижимости на отдельно взятом рынке выражением

$$Q^{(\alpha)} = \left(\sum_{n=1}^N \frac{V_n}{V} Q_n^\alpha \right)^{1/\alpha}, \quad (1)$$

где N – количество групп недвижимости данного рынка; Q_n – скорость продаж товаров n -й группы; V_n – объем товара n -й группы в денежном выражении, выставленного на продажу на сегменте данного рынка; V – объем всех товаров в денежном выражении данного рынка.

Несомненное удобство средневзвешенных характеристик – это возможность их использования в моделях рынков разного уровня и разных групп товаров. В формуле (1) величина Q_n может быть определена как средневзвешенная по конкретной группе товаров, а величина Q может быть использована при вычислении средневзвешенной скорости продаж на группе рынков и т. д.

Параметру α можно придавать различные значения $\alpha = 1$, $\alpha = -1$, $\alpha = 2$, тогда соответствующие средние есть средневзвешенные арифметические, гармонические и квадратичные значения.

Наибольшее распространение при статистической обработке данных получили средневзвешенные арифметические и квадратичные значения [11]. Для средневзвешенных арифметических и квадратичных скоростей продаж имеем

$$Q^{(1)} = \sum_{n=1}^N \frac{V_n}{V} Q_n \quad \text{и} \quad Q^{(2)} = \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{V_n}{V} Q_n^2}. \quad (2)$$

Изменение скорости продаж объектов жилой недвижимости происходит под влиянием различных внутренних (определяемых действиями застройщиков) и внешних (не зависящих от действий застройщиков) факторов, которые могут как увеличивать, так уменьшать скорость продаж. Мерой изменения скорости продаж является производная $\frac{dQ}{dt}$. В качестве гипотезы данной модели примем, что воздействие на изменение скорости продаж данного товара, если не учитывать форс-мажорные обстоятельства, связано с количеством этого товара на рынке. Это можно проследить, в частности, по маркетинговым затратам застройщиков. Полагая пропорциональность усилий на изменение скорости продаж количеству товара, динамическое уравнение воздействия на рынок запишем в виде:

$$V_n \frac{dQ_n}{dt} = \sum_{m=1}^M F_{mn}, \quad (3)$$

где F_{mn} – m -воздействие на изменение скорости продаж n -й группы товаров; M – количество воздействий принятых в модели рынка.

Тогда средняя арифметическая скорость продаж на данном сегменте рынка определится соотношением

$$\frac{dQ^{(1)}}{dt} = \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \frac{dQ_n}{dt} = \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M F_{mn}. \quad (4)$$

Используя в качестве динамической меры рынка средневзвешенную квадратичную скорость продаж, установим ее изменение с возможными воздействиями на рынок. Из определения средневзвешенной квадратичной скорости продаж

$$\left(Q^{(2)}\right)^2 = \sum_{n=1}^N \frac{V_n}{V} Q_n^2, \quad (5)$$

найдем ее приращение $dQ^{(2)}$.

$$\begin{aligned} d\left(Q^{(2)}\right)^2 &= \sum_{n=1}^N \frac{V_n}{V} 2Q_n \frac{dQ_n}{dt} dt = \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{V_n}{V} 2Q_n \frac{1}{V_n} \sum_{m=1}^M F_{mn} dt = \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N 2Q_n \sum_{m=1}^M F_{mn} dt, \end{aligned} \quad (6)$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{V \left(Q^{(2)}\right)^2}{2} \right) = \sum_{n=1}^N Q_n \sum_{m=1}^M F_{mn}. \quad (7)$$

Производная по времени от «энергии рынка» равна «мощности воздействия на рынок».

Построение предлагаемой динамической модели рыночного спроса позволит отслеживать и моделировать состояния рыночного спроса при изменении тех или иных факторов воздействия, что является инструментом прогнозирования и влияния на него. Решение задач в рамках данной модели относится к аналитическим, что значительно упрощает ее прикладное использование.

Аналитичность модели рыночного спроса подразумевает использование непрерывных функции спроса в зависимости от времени, что противоречит традиционным способам представления статистической информации «решетчатыми» функциями в виде временных рядов, определяющих значения экономических показателей в определенные интервалы времени. На достаточно больших интервалах времени превышающих выбранный временной масштаб, можно воспользоваться полиномиальной интерполяцией, представляя исследуемый процесс непрерывной функцией. Методы полиномиальной интерполяции имеют давнюю историю ее применения в различных научных областях.

В связи с появившимися возможностями использовать методы компьютерной математики в качестве интерполяционных функций начали использоваться кусочно-полиномиальные функции – сплайны. Их преимущества невысокая степень полиномов, гладкость требуемого порядка, возможность отслеживать осцилляцию интерполирующих кривых в междоузельных интервалах. Методы сплайн-интерполяции нашли широкое применение при создании

различных систем автоматизированного проектирования в частности, в автомобиле-, самолето- и кораблестроении. Как и многие другие методы математического моделирования, которые были привнесены в экономическую науку, сплайн-технологии также оказались востребованы при анализе динамики экономических процессов. К одной из первых работ, посвященных этому направлению математического моделирования в экономике, относится монография [12]. В дальнейшем в России было проведено большое количество оригинальных исследований с применением сплайн-технологии при описании закономерностей временных рядов [13, 14, 15, 16]. Сформировалось новое научное экономико-математическое направление – цикломатика. В частности, были выполнены исследования, посвященные визуализации и прогнозированию процессов регионального маркетинга; анализу экономических процессов, с точки зрения их детерминированности и стохастичности; изучению естественных ограничителей предвиденья, препятствующих точному прогнозированию в современной экономике и экономической цикличности закономерностей в различных отраслях [13, 14]. В русле этих работ были проведены исследования инновационной динамики и ее влияния на развитие региональной экономической системы [16].

Применение сплайн-технологии в описании экономических процессов, выполненное в выше перечисленных работах, преимущественно относится к построению прогнозных моделей путем гладкой экстраполяции с сохранением выявленных в ретроспективном исследовании тенденций. Динамическая модель рыночного спроса, устанавливающая связь факторов воздействия (детерминантов спроса) с изменением скорости продаж, позволяет решать как прямую, так и обратную задачи. Прямая задача – это определение детерминантов спроса по изменению рыночного тренда, а обратная – нахождение изменений в кривой

спроса по найденным детерминантам с учетом их весовых значений.

Формализация динамической модели, помимо инструментальных проблем интерполяции сплайн-функциями временных рядов, требует уточнения некоторых понятий. В частности, используемый во многих работах термин «тенденция», отражающий изменения производной в зависимости от некоторой количественной характеристики экономического процесса, предлагается заменить на общепринятое в естественно-научных и технических исследованиях понятие скорости. А производная скорости, которая характеризует изменение тенденции, есть ускорение экономического показателя, вызванное внешними воздействиями – детерминантами. Поиск этих детерминантов по анализу временного ряда в его сплайновой интерполяции и их количественная оценка относятся к прямой задаче анализа экономической динамической системы и могут быть выполнены с использованием эконометрических исследований с привлечением экспертных оценок.

Для решения этой задачи в работе на основании эконометрических ретроспективных исследований об объемах продаж, измеряемых в количестве ежемесячно продаваемых квартир, за пять лет с 2007 по 2011 г. в г. Екатеринбурге были построены сплайн-интерполяции соответствующих временных рядов и их производных до второго порядка включительно. Сплайн-интерполяция выполнялась с помощью системы компьютерной математики Mathematica 7.0. Временной ряд, характеризующий объем продаж, при этом интерполировался сплайном четвертого порядка, что позволило получать производные от сплайн-функции нужного для анализа процесса порядка. На рис. 1 представлена производная от монотонной функции объемов продаж (тенденция или скорость продаж) за период 2007–2011 гг. На рис. 2, 3 представлены в другом масштабе скорости продаж в 2008 и 2010 гг., а также вторые производные монотонной функции объемов

продаж в эти годы (изменение тенденции или ускорение).

Из рис. 1 виден циклически изменяющийся характер тенденции рыночного спроса, связанный с его сезонностью, который выражается в увеличении скорости продаж в четвертом квартале каждого года.

Негативные ожидания, связанные с проявлениями мирового финансового кризиса, отразились на графике скорости продаж ее падением в 2007 и 2008 гг. и увеличением скорости продаж в послекризисных 2009–2011 гг. Детальный анализ происходящих на рынке жилой недвижимости процессов (рис. 2) показывает присутствие двух ярко выраженных экзогенных воздействий, проявившихся в пиках ускорений с положительным знаком в начале и в конце 2008 г.

Первый пик связан с началом экономической активности населения и с последующим выходом на стационарный режим в продажах жилой недвижимости, второй пик является традиционным сезонным

увеличением скорости продаж четвертого квартала. Совершенно иной характер имеет динамика рыночного спроса на рынке жилой недвижимости в послекризисном 2010 г.

Экзогенные воздействия характерны для всего периода, что показывает кривая ускорения. К числу заметных воздействий на рынке жилой недвижимости относится событийное воздействие, связанное с открытием кредитной линии в конце 2009 г. Сбербанком России для компании «Ренова-СтройГруп» по финансированию затрат на строительство объектов недвижимости в районе Академический (г. Екатеринбург) в общей сложности на 8,17 млрд рублей. На значимость этого фактора указывает то обстоятельство, что в период всего предшествующего года объем работ, выполненных по виду деятельности «Строительство» в г. Екатеринбурге составил 22,58 млрд рублей. Наличие этого положительного событийного фактора определило динамику

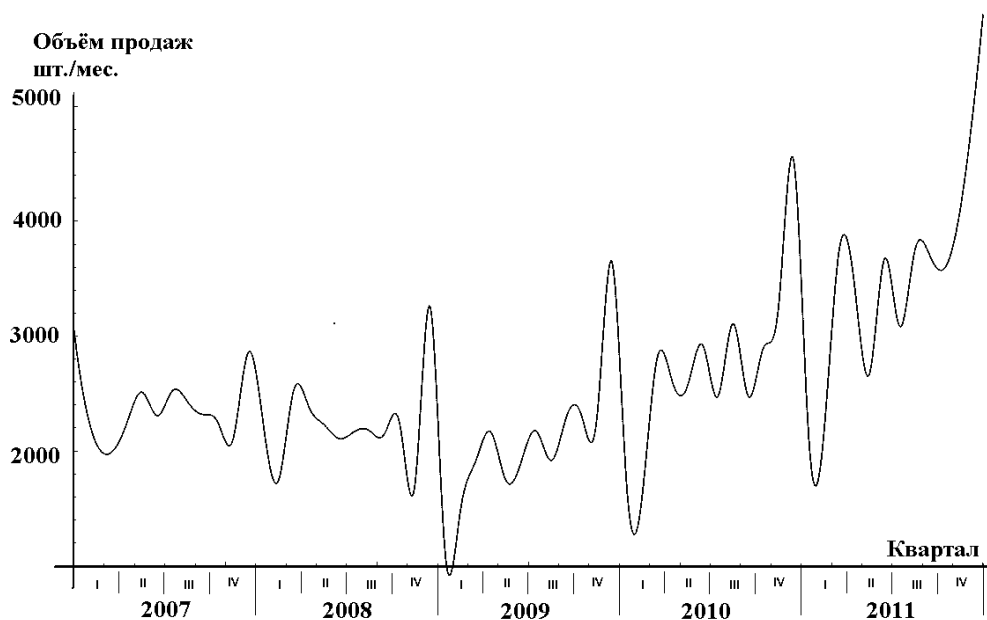


Рис. 1. Тенденции в объемах продаж на рынке жилой недвижимости г. Екатеринбурга 2007–2011 гг.

рыночного спроса на рынке жилой недвижимости г. Екатеринбурга на протяжении всего 2010 г. Другими событийными факторами, относящимися к этому же периоду, следует назвать возрождение программы ипотечного

кредитования, чему предшествовало распоряжение Правительства РФ № 1201-р от 19 июля 2010 г. «Стратегия развития ипотечного жилищного кредитования в Российской Федерации до 2030 года», а также Закон от

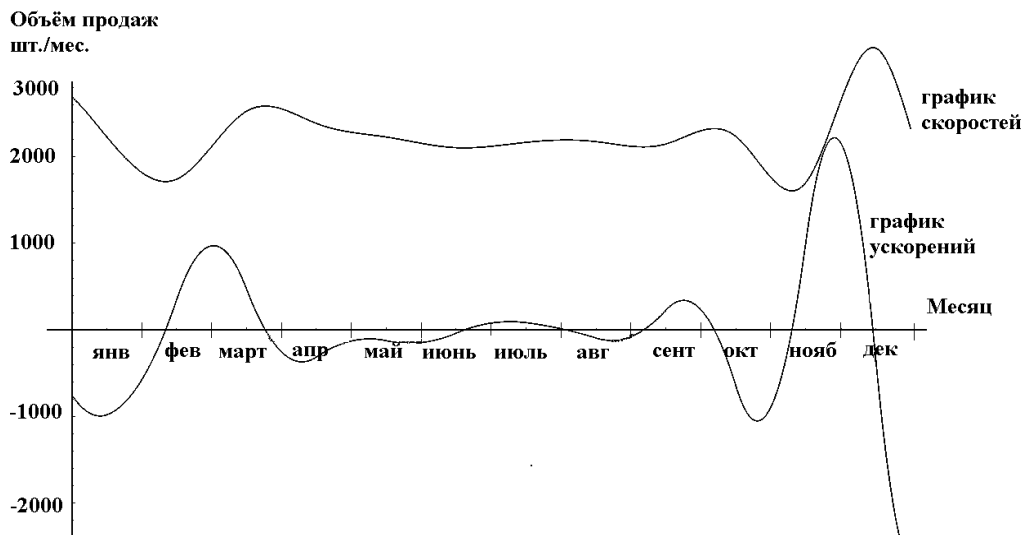


Рис. 2. Тенденции в объемах продаж и ее изменения на рынке жилой недвижимости г. Екатеринбурга 2008 г.

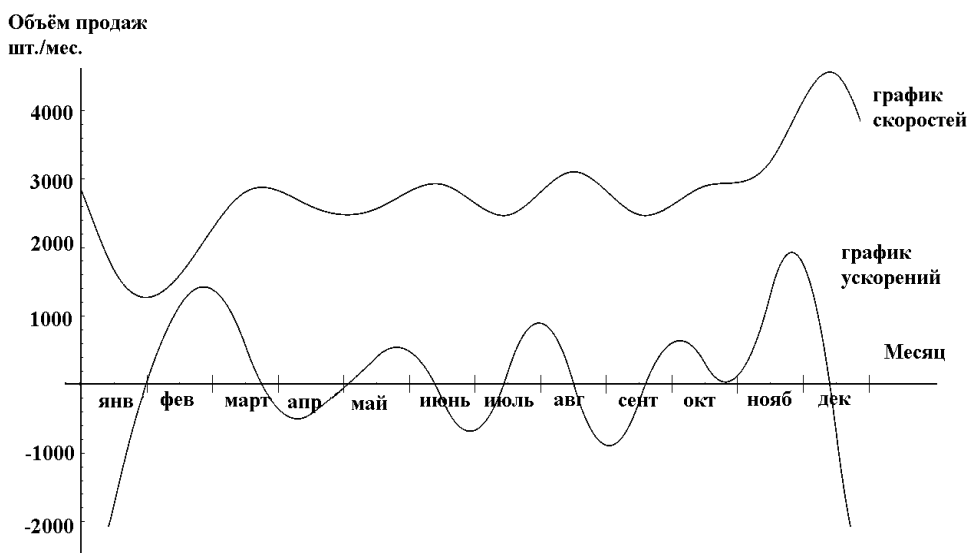


Рис. 3. Тенденции в объемах продаж и ее изменения на рынке жилой недвижимости г. Екатеринбурга 2010 г.

28.07.10 № 241-ФЗ о внесении изменений в «Закон о материнском капитале», позволяющий использовать материнские сертификаты на приобретение жилья.

Проведенный анализ рынка жилой недвижимости г. Екатеринбурга показал, что этот рынок является сложной динамической системой, изменение переменных (экономических показателей) в которой, в частности объемов продаж и тенденций, определяется экзогенными детерминантами спроса. На примере воздействия событийных факторов показано присутствие закономерных причинно-следственных связей между детерминантами спроса и рыночными показателями

изменения динамической системы. Дальнейшее исследование может быть проведено в направлении количественной оценки экзогенных воздействий на рынке жилой недвижимости, введении шкалы воздействий и сравнении обнаруженных детерминантов с некоторыми «эталонными» воздействиями с использованием цикломатических подходов при описании динамики экономических процессов. Удобным средством при работе с динамическими моделями рыночного спроса является аппарат сплайн-технологий на базе широко распространенных систем компьютерной математики, таких как MAPLE и Mathematica.

Список использованных источников

1. Герасимов Б.И., Пучков Н.П., Протасов Д.Н. Дифференциальные динамические модели. Тамбов: ТГТУ, 2010. 80 с.
2. Дыхта В.А. Динамические системы в экономике. Введение в анализ одномерных моделей. Иркутск: БГУЭП, 2003. 178 с.
3. Орлов А.И. Прикладная статистика. М.: Экзамен, 2004. 656 с.
4. Гальперин В.М., Игнатъев С.М., Моргунов В.И. Микроэкономика. М.: ВШЭ, 1999. 344 с.
5. Леонтьев В.В. Теории, исследования, факты и политика. М., 2003. 159 с.
6. Бушуева Л.И. Методы прогнозирования объемов продаж // Маркетинг в России и за рубежом. 2002. № 1 [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.mavriz.ru/articles/2002/1/47.html>.
7. Баранов Л.Я., Левин А.И. Моделирование и прогнозирование спроса населения. М.: Статистика, 1978. 208 с.
8. Платонов А.М., Румянцева А.В. Научно обоснованный подход к анализу процессов воспроизводства и выбытия жилищного фонда // Вестник УГТУ–УПИ. Серия «Экономика и управление». 2002. № 1. С. 51–59.
9. Придвижкин С.В. Рынок недвижимости как пространственная социально-экономическая система // Вестник УГТУ–УПИ. Серия «Экономика и управление». 2006. № 1.
10. Ламбен Ж.Ж. Стратегический маркетинг / пер. с франц. СПб.: Наука, 1996. 589 с.
11. Малхотра, Нэреш К. Маркетинговые исследования / пер. с англ. М.: Вильямс, 2003. 960 с.
12. Пуарье Д. Эконометрия случайных изменений (с применением сплайн-функций) / пер. с англ. М.: Финансы и статистика, 1981. 184 с.
13. Винтизенко И.Г., Яковенко В.С. Экономическая цикломатика. М.: Финансы и статистика, 2008. 428 с.
14. Винтизенко И.Г., Колесников И.М., Шадуев М.Г. Прогнозирование в моделях экономических систем. Кировоградск: Кировоградский институт экономики и права, 2001. 100 с.
15. Ильясов Р.Х. Сплайн-технологии моделирования, анализа и прогнозирования динамики экономических процессов при наличии сезонности // Актуальные вопросы современной науки : сб. науч. трудов. 2008. № 3. С. 379–390.
16. Романова О.А. Влияние инновационной динамики на развитие региональной экономической системы // Регион: экономика и социология. 2011. № 1. С. 15–32.
17. Куликов А.Г. Ипотека и жилищный вопрос в России [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.cbr.ru/publ/MoneyAndCredit/kulikov_11_10.pdf.
18. Poirier Dale J. The Econometrics of Structural Change. With Special Emphasis on Spline Functions. Amsterdam – New York – Oxford: North-Holland Publishing Company, 1976. 183 p.