Экономико-математические модели

М.Я. Ходоровский, д-р экон. наук, проф.,
В.О. Никонов, аспирант
УГТУ-УПИ, Екатеринбург

УПРАВЛЕНИЕ РИСКАМИ ПОРТФЕЛЯ ПРОЕКТОВ

В статье рассматривается экономико-математическая модель, описывающая риски, возникающие при реализации портфеля проектов с учетом их взаимного влияния. Работа опирается на подходы и методы [1-3] и продолжает исследования [4-5].

Введение. В работе рассматриваются вопросы экономико-математического моделирования рисков инвестиционных портфелей, составленных из проектов, ориентированных на решение стратегических задач организации. Составляющие таких портфелей имеют свои специфические особенности, принципиально отличающие их от инструментов, традиционно рассматриваемых в рамках портфельных теорий – ценных бумаг и иных активов фондового рынка.

Известны различные классификации рисков, влияющих на проект [1]. Для каждого из рисков можно применять различные методы оценки и определения количества риска, ранжирования и т.д. В наиболее распространенной трактовке риска риск определяется при помощи трех элементов: рискового события, вероятности, с которой это событие может наступить, и величины влияния (чаще всего – ущерба), которое рисковое событие может нанести предполагаемым результатам проекта [3].

В работе предложена трактовка риска проекта как случайной величины в математическом смысле этого термина. Поскольку чаще всего в проекте присутствует не единственный риск, предложенная формализация риска предполагает определение совокупного риска проекта, агрегирующего частные риски.

Заключительная часть статьи посвящена формализации портфеля проектов и проблеме выделения т.н. эффективных портфелей, являющихся наиболее предпочтительными для инвесторов с точки зрения ожидаемого дохода и риска. Здесь использованы подходы и методы теории портфельных инвестиций, восходящие к работе [2].

Постановку и решение задачи излагаем в простейшем варианте. А именно, предполагаем, что цель (критерий качества) формирования портфеля состоит в максимизации приведенной прибыли (NPV) при выполнении ограничений по ресурсам и риску.

Классификация рисков по характеру их взаимовлияния. Риски проекта характеризуются величиной ущерба, который наносит проекту реализация того или иного рискового события. В рассматриваемом случае величину ущерба от наступления события ω можно задать в виде доли $U(\omega)$ от расчетного (без учета рисков) значения NPV.

Таким образом, влияние рисков предполагаем мультипликативным, т.е. при реализации риска ω и при отсутствии прочих рисковых событий вместо расчетного значения NPV инвестор получает $(1-U(\omega))\cdot NPV$. Например, если риск ω соответствует повышению ставки по необходимым для реализации проекта кредитам и приводит к 30% потерям от приведенного дохода, то $U(\omega)=0.3$ и $1-U(\omega)=0.7$. Допустимы и отрицательные значения величины $1-U(\omega)$, они соответствуют рискам, которые приводят к потерям при реализации проекта.

Если реализуются одновременно два и более рисковых события, то величина совокупного ущерба зависит от характера взаимовлияния рисков.

В настоящей работе будут рассмотрены следующие варианты названного взаимовлияния. Обозначим через ω_{ij} рисковое событие, состоящее в том, что реализуются одновременно события ω_i и ω_j.

1. Риски ω_i и ω_j будем называть *аддитивными*, если $U(\omega_{ij})=U(\omega_i)+U(\omega_j)$.

Типичный пример такой ситуации доставляют риски сбоя в поставках оборудования, материалов или услуг, приводящие к необходимости менять контрагентов-поставщиков, следствием чего является повышение цены на необходимый для реализации проекта товар. Сбой в поставках от двух поставщиков одновременно приводит к ущербу, равному сумме ущербов от каждого из двух рисковых событий.

2. Будем говорить, что риски ω_i и ω_j *взаимно усиливают* друг друга, если $U(\omega_{ij})=\alpha(U(\omega_i)+U(\omega_j))$ $\alpha>1$, и *взаимно ослабляют*, если $\alpha<1$.

Большая часть рисков принадлежит именно к указанной группе. Реализация двух и более разнородных рисковых событий может привести к гораздо большему ущербу, чем сумма ущербов от отдельных рисковых событий, вплоть до приостановки проекта. Так, при осуществлении инвестиционных проектов, ориентированных на выпуск новой продукции, одновременная реализация валютного риска и риска изменения спроса может стать критичной для проекта. Взаимное ослабление рисков возможно, если в число рисковых событий включать не только заведомо негативные для проекта, но и иные, приводящие к отклонению характеристик проекта от расчетных значений.

3. Если при наступлении двух событий ω_i и ω_j результат от события ω_i делает бессмысленным учет события ω_j, то риск ω_i назовем *поглощающим* по отношению к ω_j, в этом случае $U(\omega_{ij})=U(\omega_i)=\max\{U(\omega_i),U(\omega_j)\}$.

Например, риск, связанный с похищением оборудования, материалов и др. является поглощающим по отношению к риску повреждения соответствующих товаров.

Вероятностное пространство рисковых событий отдельного проекта. Предполагается, что проекту сопоставлен набор рисковых событий (рисков) $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_K$. Среди указанных рисков выделим независимые, т.е. те, реализация которых не зависит от того, осуществятся другие возможные рисковые события или нет. В реальных ситуациях к таким рискам можно отнести «внешние» по отношению к содержанию проекта риски: риск изменения процентных ставок, риск неблагоприятных погодных условий и др. Не ограничивая общности, полагаем, что эти риски имеют номера 1, … , K_1. Зависимые между собой риски объединим в группы таким образом, что риски из различных групп можно считать независимыми.

Не ограничивая общности, будем предполагать, что такая группа зависимых между собой рисков лишь одна. Приводимые ниже построения легко переносятся на случай двух и более указанных групп.

Суммируя сказанное, имеем K_1 независимых рисковых событий $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{K_1}$ и группу $\omega_{K_1+1}, \omega_{K_1+2}, \ldots, \omega_K$ зависимых между собой рисков.

Для определения вероятностного пространства рисков сформируем множество Ω, составленное из т.н. элементарных событий. (Неэлементарные события формируются как подмножества множества Ω).

Элементарным событием в рассматриваемом случае является событие вида $\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_N$, где $\alpha_k = \omega_k$, либо $\alpha_k = \neg\omega_k$, $k = 1, \ldots K$. Содержательно событие состоит в том, что какие-то риски реализуются ($\alpha_k = \omega_k$), а какие-то – нет ($\alpha_k = \neg\omega_k$).

Далее следует определить вероятности осуществления элементарных событий. Для независимых рисков $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{K_1}$ предполагаем, что указанные вероятности P_k = $\mathrm{P}(\omega_k)$ заданы (на основании либо экспертных, либо статистических оценок). Для упрощения дальнейших рассуждений и расчетных формул построения для группы зависимых рисков проведем в рамках следующего предположения.

<u>Предположение 1.</u> В рамках группы зависимых рисков вероятность реализации трех и более рисковых событий пренебрежимо мала и может полагаться равной нулю.

В условиях принятых предположений число элементарных событий, которые могут иметь ненулевую вероятность равно $1 + K + C_{K-K_1}^2$.

Единице соответствует случай, когда ни один риск не реализуется, второму слагаемому K – число вариантов, когда реализуется ровно один риск, и последнее слагаемое – число сочетаний из K-K_1 элементов по два – количество ситуаций, когда реализуется ровно два рисковых события.

Для формирования вероятностного описания возможных ситуаций следует определить вероятность любого возможного в рамках рассматриваемой постановки события $\omega \in \Omega$.

Для $k > K_1$ будем считать заданными вероятности P_k событий, состоящих в том, что реализуется один и только один риск с соответствующим номером.

В подробной записи

$$P_k = \mathrm{P}(\omega_k) = \mathrm{P}(\neg\omega_{K_1+1} \wedge \ldots \wedge \neg\omega_{k-1} \wedge \omega_k \wedge \neg\omega_{k+1} \wedge \ldots \wedge \neg\omega_K).$$

Для полного описания вероятностей всех возможных элементарных событий осталось определить вероятности одновременного осуществления событий ω_k и ω_m, где k, m - номера, превосходящие K_1. Эти вероятности обозначим символами $P_{k,m}$. В подробной записи (для $m > k$) имеем:

$$P_{k,m} = \mathrm{P}(\omega_k \wedge \omega_m) =$$

$$P(\neg\omega_{K_1+1} \wedge \ldots \wedge \neg\omega_{k-1} \wedge \omega_k \wedge \neg\omega_{k+1} \wedge \ldots \neg\omega_{m-1} \wedge \omega_m \wedge \neg\omega_{m+1} \wedge \ldots \wedge \neg\omega_K).$$

Заметим, что по построению должно выполняться равенство:

$$\sum_{k=K_1+1}^{K} P_k + \sum_{i>j>K_1} P_{j,i} + \mathrm{P}(\omega_0^{K_1}) = 1,$$

где $\omega_0^{K_1}$ - событие, состоящее в том, что не реализуется ни один из зависимых рисков.

Рассмотрим теперь произвольное возможное (в рамках Предположения 1) элементарное событие ω^*. Предположим, что в группе зависимых рисков реализуется лишь один риск ω_n $(n>K_1)$. В этом случае вероятность события $P(\omega^*)$ определяется равенством

$$P(\omega^*) = P(\omega_1)\cdot P(\omega_2) \cdot \ldots \cdot P(\omega_{K_1})\cdot P_n .$$

Множество элементарных событий описанного вида обозначим символом Ω^*.

В случае, когда элементарное событие ω^{**} таково, что во второй группе рисков реализуется два зависимых рисковых события ω_k и ω_m, (k, $m > K_1$), имеем

$$P(\omega^{**}) = P(\omega_1)\cdot P(\omega_2) \cdot \ldots \cdot P(\omega_{K_1})\cdot P_{k,m} .$$

Для множества таких событий примем обозначение - Ω^{**}.

По построению имеем: $\sum\limits_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1$.

Агрегирование рисков. Совокупный риск проекта. Цель дальнейших построений – определить случайную величину, описывающую влияние возможных рисковых событий на результат проекта, которая и будет трактоваться как совокупный риск проекта. Будем предполагать, что задано расчетное значение *NPV* проекта, получаемое стандартным образом без учета потерь, связанных с реализацией рисковых событий. Не ограничивая общности, считаем, что $NPV > 0$, в противном случае проект исключается из рассмотрения как заведомо нецелесообразный.

Для определения искомой случайной величины достаточно задать значения U_k для независимых рисков первой группы $(k \le K_1)$, значения U_k для событий вида $(\neg\omega_{K_1+1} \wedge \ldots \wedge \neg\omega_{k-1} \wedge \omega_k \wedge \neg\omega_{k+1} \wedge \ldots \wedge \neg\omega_K)$ $(k > K_1)$ и значения $U_{k,m}$ функции влияния для тех случаев, когда во второй группе рисков реализуется ровно два рисковых события ω_k и ω_m - т.е. для элементарных событий вида

$$(\neg\omega_{K_1+1} \wedge \ldots \wedge \neg\omega_{k-1} \wedge \omega_k \wedge \neg\omega_{k+1} \wedge \ldots \neg\omega_{m-1} \wedge \omega_m \wedge \neg\omega_{m+1} \wedge \ldots \wedge \neg\omega_K).$$

В последнем случае указанные значения определяется в соответствии с классификацией рисков. Полагаем

$U_{k,m} = U_k + U_m$ для аддитивных рисков;

$U_{k,m} = \max\{U_k, U_m\}$ для поглощающих рисков;

$U_{k,m} = \alpha\,(U_k + U_m)$, где $\alpha > 1$, если риски взаимно усиливают друг друга, и $\alpha < 1$, если риски взаимно ослабляют друг друга;

Возможны и иные варианты. В общем случае $U_{k,m} = F(U_k, U_m)$.

В результате получаем случайную величину, определенную на всех возможных в рамках данной постановки событиях. С учетом того, что для независимых рисков значения функции влияния складываются, приходим к следующему виду распределения:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
U & \sum\limits_{l=1}^{K_1} U_l + U_n & \sum\limits_{k=1}^{K_1} U_k + U_{k,m} & \mathbf{0} \\
\hline
\omega & \omega \in \Omega^* & \omega \in \Omega^{**} & \omega_0
\end{array}$$

Случайную величину $U(\omega)$ будем трактовать как *совокупный риск проекта* (или, точнее, *совокупное влияние рисков на результат проекта*).

Риск и доход портфеля. Эффективные портфели проектов. Пусть портфель составлен из L проектов с номерами, образующими множество $J=\{i_1, \ldots, i_L\}$.

Тогда случайная величина, определяющая приведенный доход портфеля, выражается как сумма доходов входящих в портфель проектов:

$$NPV_P = \sum_{i \in J} U_i(\omega) NPV_i$$

Здесь через ω снова обозначено случайное событие, однако, характеризующее риски всех проектов портфеля одновременно. Полное вероятностное описание такой случайной величины достаточно громоздко ввиду большого числа возможных вариантов сочетаний различных комбинаций рисков.

В то же время, для расчета математического ожидания $E[NPV_P]$ и средне квадратичного отклонения $\sigma[NPV_P]$ этого и не требуется.

Достаточно определить вероятности совместного осуществления рисковых событий из различных проектов α_k^i и α_m^j, где индексы i и j обозначают номера проектов, а k и m - номера рисков в соответствующих проектах. Символ ω заменен на α, чтобы подчеркнуть, что в число рассматриваемых рисков здесь включены и составные риски, объединяющие два простых, исходных риска. Эти вероятности обозначим символами $P_{k,m}^{i,j}$.

Заметим, что определение указанных вероятностей упрощается ввиду большего количества независимых (специфических для отдельных проектов) рисков, а также одних и тех же, присущих всем проектам одновременно.

В соответствии со свойствами математического ожидания имеем

$$E[NPV_P] = E[\sum_{i\in J} U_i(\alpha^i) NPV_i] = \sum_{i\in J} \mathrm{E}[U_i(\alpha^i)] NPV_i \,. \qquad (1)$$

Величина $E[NPV_P]$, определяемая соотношением (1), трактуется как *ожидаемый приведенный доход* портфеля проектов.

Для определения величины $\sigma[NPV_P]$ обозначим символом q_J вектор-столбец, компонентами которого являются значения NPV_i, где $i=i_1, \ ...., \ i_L$ ($i\in J$). Коэффициенты ковариации соответствующих случайных величин определяются равенствами ($i,j\in J$)

$$\mathrm{cov}(U_i(\alpha^i), U_j(\alpha^j)) = \sum_{k,m} P_{k,m}^{i,j} \{U_i(\alpha_k^i) - E[U_i]\}\{U_j(\alpha_m^j) - E[U_j]\} \,.$$

С учетом введенных обозначений имеем

$$\sigma^2[NPV_P] = q_J^T V_J q_J \,, \qquad (2)$$

где через V_J обозначена матрица ковариаций для набора случайных величин

$U_k(\alpha^k)$ с номерами $\kappa\in J$, отвечающими выбранному портфелю проектов.

Следуя подходу Г. Марковица , величину $\sigma[NPV_P]$ будем трактовать как *риск портфеля* проектов.

Развивая названный подход, *эффективным портфелем проектов* будем называть такой портфель $P^* : J^*=\{i_1^*, \ ...., \ i_L^*\}$, для которого не существует допустимого портфеля $P : J=\{i_1, \ ...., \ i_M\}$ со свойствами:

$$E[NPV_P] \ \geq \ E[NPV_{P^*}],$$

$$\sigma[NPV_P] \leq \ \sigma[NPV_{P^*}],$$

где по крайней мере одно из неравенств – строгое.

Последнее определение выражает свойство неулучшаемости эффективного портфеля.

Библиографический список

1. Путеводитель в мир управления проектами / под ред. проф. Ю.Л. Эдкинда. Екатеринбург: УГТУ, 1998.
2. Markowitz, H. Portfolio selection / H.Markowitz // J. Finance. 1952. Vol.7. P.77-91.
3. Максимов, В.И. Моделирование риска и рисковых ситуаций: учеб. пособие / В.И. Максимов, О.И. Никонов. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2004. 82 с.
4. Дьяконов Б.П. Интеграция системы управления проектами в систему менеджмента компании: общие подходы к построению интегрированной системы менеджмента / Б.П. Дьяконов, В.О. Никонов // Управление проектами, 2(2), 2005 .
5. Никонов В.О. Управление риском портфеля проектов / В.О. Никонов // Информационно–математические технологии в экономике, технике и образовании: к 10-лет. юбилею каф. анализа систем и принятия решений: сб. ст. / Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2004.